

Ex-O1.12 Arc-en-ciel (, CCP2005)** [C20/16 ; P2/573]

Lorsque le Soleil illumine un rideau de pluie, on peut admettre que chaque goutte d'eau se comporte comme une sphère réceptionnant un faisceau de rayons parallèles entre eux. On recherche les conditions pour que la lumière émergente, issue d'une goutte d'eau, se présente sous forme d'un faisceau de lumière parallèle (c'est à cette condition que l'intensité lumineuse sera maximale, donc observable pour l'œil). Pour cela on fait intervenir l'angle de déviation D de la lumière à travers la goutte d'eau, mesuré entre le rayon émergent et le rayon incident. Cet angle de déviation D est une fonction de l'angle d'incidence i .

On admettra que la condition de parallélisme des rayons émergents se traduit mathématiquement par $\frac{dD}{di} = 0$.

1) Rappeler les lois de Descartes pour la réfraction d'un rayon lumineux passant de l'air (milieu d'indice unité) vers un milieu d'indice n . Exprimer la dérivée $\frac{dr}{di}$ exclusivement en fonction de l'indice n et du sinus de l'angle d'incidence.

2) Une goutte d'eau quelconque, représentée par une sphère de centre O et de rayon R , est atteinte par la lumière solaire sous des incidences variables, comprises entre 0° et 90° .

Son indice, pour une radiation donnée, sera noté n tandis que celui de l'air sera pris égal à l'unité.

Répondre aux questions ci-après pour chacun des trois cas suivants :

- lumière directement transmise (figure 1)

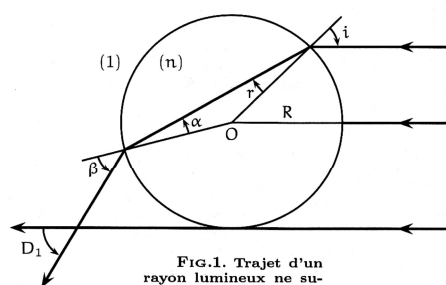


FIG.1. Trajet d'un rayon lumineux ne subissant pas de réflexion partielle à l'intérieur de la goutte

- lumière transmise après une réflexion partielle à l'intérieur de la goutte (figure 2) ;

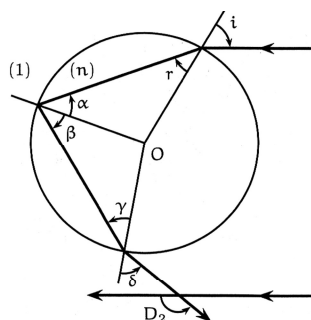


FIG. 2. Trajet d'un rayon lumineux subissant une réflexion partielle à l'intérieur de la goutte

- lumière transmise après deux réflexions à l'intérieur de la goutte (figure 3).

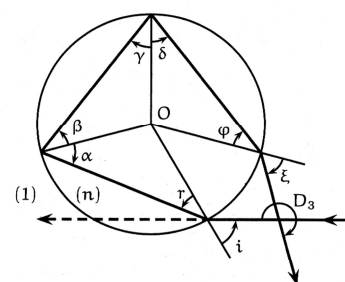


FIG.3. Trajet d'un rayon lumineux subissant deux réflexions partielles à l'intérieur de la goutte

a) Exprimer en fonction de l'angle d'incidence i ou de l'angle de réfraction r , tous les angles marqués de lettres grecques.

b) En déduire l'angle de déviation D propre à chaque cas, en fonction de i et de r .

c) Rechercher ensuite, si elle existe, une condition d'émergence d'un faisceau parallèle, exprimée par une relation entre le sinus de l'angle d'incidence et l'indice n de l'eau.

3) Le Soleil étant supposé très bas sur l'horizon, normal au dos d'un observateur, montrer que celui-ci ne pourra observer la lumière transmise que si la goutte d'eau se trouve sur deux cônes d'axes confondus avec la direction solaire et de demi-angles au sommet θ_2 et θ_3 .

→ Exprimer ces deux angles en fonction de D_2 et D_3 .

4) Les angles θ_2 et θ_3 dépendant de l'indice n de l'eau, on observe un phénomène d'irisation dû au fait que cet indice évolue en fonction de la longueur d'onde.

→ Calculer ces angles θ_2 et θ_3 pour le rouge et le violet, sachant que pour le rouge l'indice vaut $n_R = 1,3317$ tandis que pour le violet il est égal à $n_V = 1,3448$.

5) En admettant que l'observateur se trouve face à un rideau de pluie, dessiner la figure qui apparaît dans son plan d'observation en notant la position respective des rouges et des violets.

Ex-01.13 Taille d'un miroir

Quelle taille minimum doit avoir un miroir plan pour qu'un homme de $1,80\text{ m}$ puisse s'y voir entièrement et où le miroir doit-il se trouver ?

Rép. : Miroir de 90 cm placé à 85 cm du sol.

Ex-01.14 Mesure d'un angle de rotation par la méthode de Poggendorff

Montrer que lorsque le miroir tourne d'un angle α le rayon réfléchi tourne de 2α . (on peut ainsi mesurer l'angle dont tourne un objet mobile en collant un petit miroir sur lequel on envoie un rayon lumineux et en mesurant l'angle dont tourne le réfléchi.)

Solution Ex-01.12

1) • Lois de Descartes pour la réfraction :

- ① le rayon réfracté est dans le plan d'incidence
- ② $1 \cdot \sin i = n \cdot \sin r$

• En différentiant cette expression (pour une radiation monochromatique, $n = n(\lambda)$ étant fixé) : $\cos i \cdot di = n \cdot \cos r \cdot dr$, soit : $\frac{dr}{di} = \frac{1 \cos i}{n \cos r}$

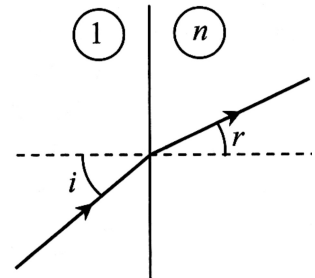
En utilisant la loi de la réfraction :

$$\sin i = n \cdot \sin r$$

et la relation trigonométrique :

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin i = n \cdot \sin r \\ \sin^2 a + \cos^2 a = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{dr}{di} = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}}$$

**2) Figure 1**

a) Pour la lumière directement transmise, il apparaît que le triangle OIJ est isocèle, et que par conséquent, les angles à la base sont égaux : $\alpha = r$.

En appliquant la loi de Snell-Descartes en J , on obtient $n \cdot \sin \alpha = \sin \beta$.

Or $\alpha = r$ et $\sin i = n \cdot \sin r$. Donc : $\beta = i$.

b) En I , le rayon lumineux subit une réfraction ; il subit donc une déviation $D_I = i - r$.

En J il subit également une réfraction : $D_J = \beta - \alpha$.

Or $\alpha = r$ et $\beta = i$.

La déviation totale est : $D_1 = D_I + D_J = i - r + i - r$. Soit : $D_1 = 2(i - r)$

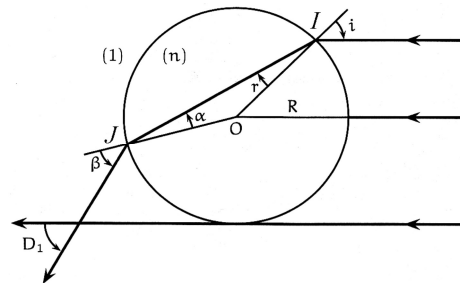
c) En différentiant cette expression : $dD_1 = 2di - 2dr$, soit : $\frac{dD_1}{di} = 2 - 2\frac{dr}{di}$.

La condition d'émergence d'un faisceau parallèle est : $\frac{dD_1}{di} = 0$, soit : $\frac{dr}{di} = 1$

Par ailleurs, d'après 1) : $\frac{dr}{di} = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}}$.

On doit donc avoir : $n^2 - \sin^2 i = 1 - \sin^2 i$, soit : $n^2 = 1 \Leftrightarrow n = 1$.

Cette solution n'a pas d'intérêt physique car l'indice de l'eau $n \simeq \frac{4}{3}$ n'est en réalité pas le même que celui de l'air ! Il n'est donc pas possible d'observer un faisceau parallèle recherché dans les conditions de la figure 1.

**2) Figure 2**

a) Pour la lumière réfléchiée une fois à l'intérieur de la goutte, on trouve que $\alpha = r$ car le triangle OIJ est isocèle. La loi de la réflexion appliquée en J donne $\beta = \alpha = r$.

Le triangle OJK étant isocèle également : $\gamma = \beta = r$.

Enfin, la loi de la réfraction appliquée en K donne $n \cdot \sin \gamma = \sin \delta$, avec $\gamma = r$ et $n \cdot \sin r = \sin i$, il vient $\boxed{\delta = i}$.

b) Dans le cas où le rayon lumineux subit une réflexion à l'intérieur de la goutte, il subit :

- en I une réfraction qui le dévie de $D_I = i - r$.
- En J il subit une réflexion, ce qui provoque une déviation $D_J = \pi - 2\alpha = \pi - 2r$.
- Il subit enfin en K une réfraction, ce qui provoque une dernière déviation $D_K = \delta - \gamma = i - r$.

La déviation totale est : $D_2 = D_I + D_J + D_K$.

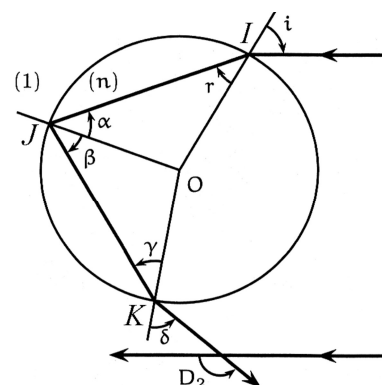
Soit : $\boxed{D_2 = \pi + 2i - 4r}$

c) En différentiant cette expression : $dD_2 = 2di - 4dr$, soit : $\frac{dD_2}{di} = 2 - 4\frac{dr}{di}$.

La condition d'émergence d'un faisceau parallèle est : $\frac{dD_2}{di} = 0$, soit : $\frac{dr}{di} = \frac{1}{2}$

Par ailleurs, d'après **1)** : $\frac{dr}{di} = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}}$.

On doit donc avoir : $n^2 - \sin^2 i = 4(1 - \sin^2 i)$, soit : $\boxed{\sin^2 i = \frac{4 - n^2}{3}}$.



2) Figure 3

a) Pour la lumière réfléchi deux fois dans la goutte, on a toujours OIJ isocèle qui donne $\boxed{\alpha = r}$.

La loi de la réflexion en J donne $\boxed{\beta = \alpha = r}$. Le triangle OJK étant isocèle, on a $\boxed{\gamma = \beta = r}$.

La loi de la réflexion en K donne $\delta = \gamma = r$. Le triangle OKL étant isocèle : $\boxed{\varphi = \delta = r}$.

Enfin, la loi de la réfraction en L donne $n \cdot \sin \varphi = \sin \xi$.

Comme $\varphi = r$ et que $n \cdot \sin r = \sin i$, on a : $\boxed{\xi = i}$

b) Dans le cas où le rayon lumineux subit deux réflexions à l'intérieur de la goutte, il subit :

- en I une réfraction qui provoque une première déviation $D_I = i - r$,
- puis en J une réflexion, qui provoque une deuxième déviation $D_J = \pi - 2\alpha = \pi - 2r$,
- puis en K une autre réflexion, qui provoque une troisième déviation $D_K = \pi - 2\gamma = \pi - 2r$,
- et enfin en L une réfraction qui provoque une dernière déviation $D_L = \xi - \varphi = i - r$.

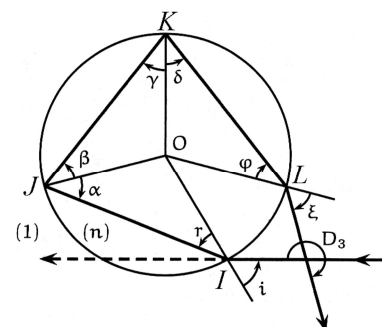
→ La déviation totale est : $D_3 = D_I + D_J + D_K + D_L$. Soit : $\boxed{D_3 = 2\pi + 2i - 6r}$

c) En différentiant cette expression : $dD_3 = 2di - 6dr$, soit : $\frac{dD_3}{di} = 2 - 6\frac{dr}{di}$.

La condition d'émergence d'un faisceau parallèle est : $\frac{dD_3}{di} = 0$, soit : $\frac{dr}{di} = \frac{1}{3}$

Par ailleurs, d'après **1)** : $\frac{dr}{di} = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}}$.

On doit donc avoir : $n^2 - \sin^2 i = 9(1 - \sin^2 i)$, soit : $\boxed{\sin^2 i = \frac{9 - n^2}{8}}$.



3) • L'observateur regarde vers l'horizon, dans la direction du rideau de pluie qui provoque le phénomène de déviation de la lumière incidente du Soleil. Il observe des maxima d'intensité lumineuse pour les deux configurations calculées à la question précédente.

Toutes les gouttes susceptibles de donner l'angle d'observation adéquat sont situées sur un cône de sommet l'œil de l'observateur, d'axe la direction incidente du Soleil, et d'angle au sommet θ_2 pour l'observation de l'arc primaire (correspondant à une incidence i_2 sur la goutte). On a donc :

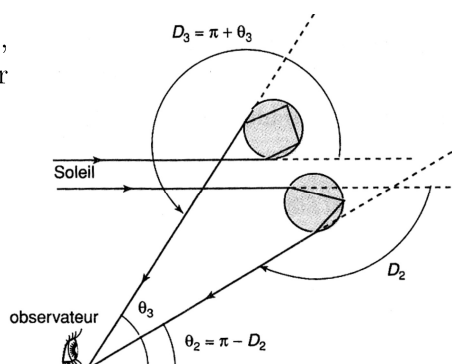
$\boxed{\theta_2 = \pi - D_2}$

• On obtient le même phénomène pour l'arc secondaire, mais cette fois-ci, l'angle θ_3 d'observation est donné par

$$\theta_3 = D_3 - \pi$$

4) On a :

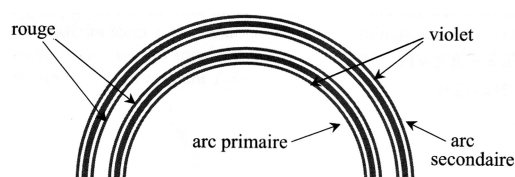
$$\left. \begin{aligned} \sin^2 i_2 &= \frac{4 - n^2}{3} \\ n \cdot \sin r_2 &= \sin i_2 \\ D_2 &= \pi + 2i_2 - 4r_2 \\ \theta_2 &= \pi - D_2 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \sin^2 i_3 &= \frac{9 - n^2}{8} \\ n \cdot \sin r_3 &= \sin i_3 \\ D_3 &= 2\pi + 2i_3 - 6r_3 \\ \theta_3 &= D_3 - \pi \end{aligned} \right.$$



Angles ($^\circ$)	i_2	r_2	D_2	θ_2	i_3	r_3	D_3	θ_3
Violet	58,73	39,46	139,62	40,38	71,46	44,83	233,94	53,94
Rouge	59,48	40,31	137,72	42,28	71,88	45,54	230,52	50,52

Un observateur situé face au rideau de pluie verra ici deux arcs-en-ciel :

- l'arc primaire allant du violet au rouge en partant de l'intérieur,
- et l'arc secondaire, plus grand, et moins intense (puisqu'une partie de la lumière a déjà été dispersée dans la formation de l'arc primaire) allant du rouge au violet.

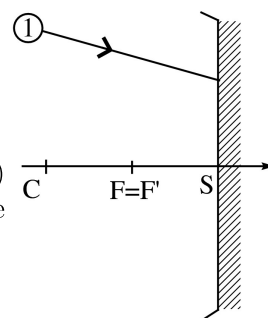


■ Miroirs sphériques

Ex-O3.1 Tracé de rayon pour un miroir concave

Compléter le tracé du rayon ① :

- 1) En utilisant des rayons parallèles à ① (deux méthodes)
- 2) En utilisant des rayons coupant ① le plan focal objet (deux méthodes)
- 3) En envisageant un objet AB fictif, judicieusement choisi, et son image $A'B'$.



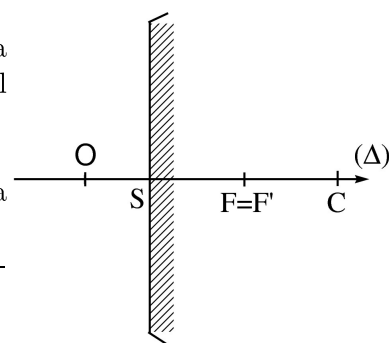
Ex-O3.2 Tracé d'image pour un miroir convexe

Soit un miroir convexe de rayon $\overline{SC} = +60 \text{ cm}$. Quelle est la position de l'image $A'B'$, sa nature et le grandissement transversal correspondant dans les deux cas suivants

- 1) l'objet AB est tel que $\overline{SA} = -30 \text{ cm}$
- 2) l'objet AB est tel que $\overline{SA} = +15 \text{ cm}$. Peut-on se servir de la question précédente pour éviter les calculs ?
- 3) Trouver la position de l'objet AB qui conduit à un grandissement transversal $G_t = -\frac{1}{2}$. Quelle est sa nature ?

✕ On fera une figure à l'échelle pour chacune des questions.

Rép : 1) $\overline{SA'} = +15 \text{ cm}$, $G_t = \frac{1}{2}$; 2) $\overline{SA'} = -30 \text{ cm}$, $G_t = 2$; 3) $\overline{SA} = +60 \text{ cm}$



Ex-O3.3 Petite cuillère

Un individu a son œil placé à 25 cm du creux d'une petite cuillère considérée comme un miroir sphérique convergent.

- 1) Sachant que l'individu voit son œil inversé et réduit d'un facteur 9, calculer le rayon de courbure de la cuillère.
- 2) Quel est le grandissement de la nouvelle image si l'individu retourne la cuillère, tout en conservant la même distance de 25 cm ?

Rép : 1) $\overline{SC} = -5 \text{ cm}$; 2) $G_t = 9/100$