

PHYSIQUE

Pour les applications numériques, une aide au calcul se trouve à la fin de la partie physique.

Partie A : étude de deux mouvements circulaires

Les deux sous-parties de ce problème sont totalement indépendantes. Dans la première, on s'intéresse au mouvement guidé d'un point matériel sur un rail circulaire tandis que la seconde traite du mouvement d'un proton dans un cyclotron.

A.1. Mouvement d'un point matériel sur un rail circulaire

Un petit objet assimilé à un point matériel M, de masse m , peut glisser sans frottement le long d'un rail ayant la forme d'un demi-cercle de centre O et de rayon R , placé dans un plan vertical.

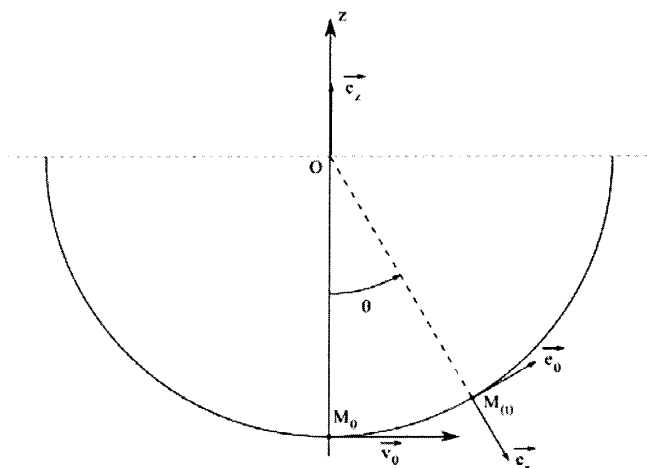
Le rail est d'abord supposé fixe par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}$ galiléen.

On repère la position du point M à l'instant t par l'angle $\theta(t) = (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM(t)})$.

À l'instant $t = 0$, l'objet est lancé du point M_0 avec une vitesse $\vec{V}_0$.

Dans tout le problème, on utilisera une base de projection polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

On prendra pour valeur de l'accélération de la pesanteur $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.



A.1.1. Faire l'inventaire des forces appliquées à M, et les représenter sur un schéma clair lorsque le point est dans une position $M(t)$ quelconque. On précisera les composantes de ces forces sur la base polaire.

A.1.2. En déduire l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $\theta(t)$.

A1.3. On suppose que la norme V_0 du vecteur vitesse initial est suffisamment faible pour que la condition $|\theta(t)| \ll 1 \text{ rad}$ soit satisfaite à chaque instant. Déterminer complètement l'expression de $\theta(t)$ dans cette hypothèse en fonction de V_0 , g , R et t .

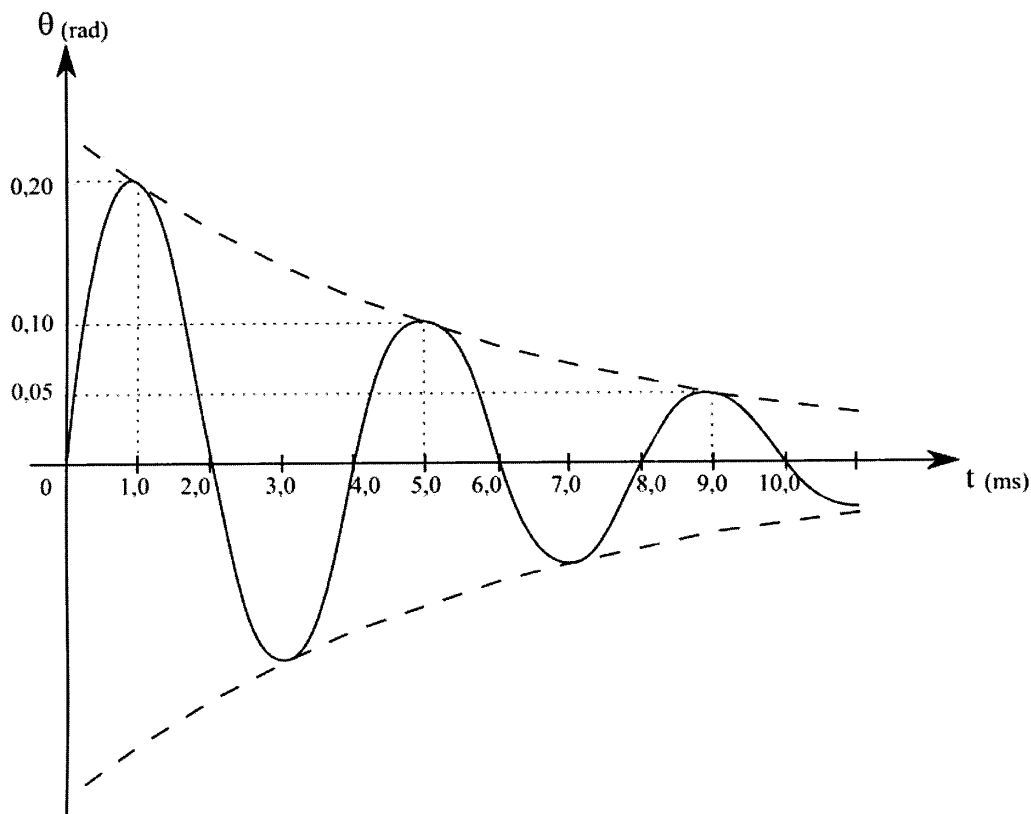
On suppose à partir de maintenant que le point M subit au cours de son mouvement une force de frottement fluide $\vec{f} = -\lambda \vec{V}$, où λ est une constante positive et $\vec{V}$ le vecteur vitesse du point M à l'instant t . La condition $|\theta(t)| \ll 1 \text{ rad}$ reste également satisfaite à chaque instant.

A.1.4. Établir la nouvelle équation différentielle satisfaite par la fonction $\theta(t)$.

A.1.5. Les grandeurs m , g et R étant fixées, donner la condition portant sur λ pour que le mouvement soit pseudo-périodique.

A.1.6. On suppose la condition du **A.1.5.** réalisée. Exprimer $\theta(t)$ sous la forme $\theta(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \sin(\Omega t)$. On justifiera soigneusement l'établissement de cette relation et on exprimera A , τ et Ω en fonction de V_0 , m , g , R et λ .

A.1.7. L'allure de la courbe représentative des variations de la fonction $\theta(t)$ est donnée ci-dessous.



On appelle décroissement logarithmique la grandeur sans dimension $\delta = \ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right)$, où T désigne la pseudo-période. Exprimer λ en fonction de δ , m et T . Par lecture graphique, déterminer les valeurs de T et δ . En déduire celle de λ (sans omettre de préciser son unité), sachant que $m = 100$ g.

Le rail est maintenant mis en rotation uniforme autour de l'axe (OM_0) à la vitesse angulaire ω . On néglige de nouveau les frottements.

A.1.8. Le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au rail est-il galiléen ? Justifiez votre réponse.

A.1.9. Comment s'écrit la relation fondamentale de la dynamique dans un référentiel non galiléen ? On précisera soigneusement le nom de tous les termes introduits dans sa nouvelle expression.

A.1.10. L'objet était initialement en M_0 ($\theta_0 = 0$). Après une phase transitoire lors de la mise en rotation du rail, il se stabilise en $\theta_{eq} = \frac{\pi}{3}$.

A.1.10.i. Donner l'expression littérale des forces d'inerties dans cette situation.

A.1.10.ii. Exprimer ω en fonction de g , R et θ_{eq} . Calculer ensuite ω pour $R = 20$ cm.

Fin de la partie A.1.