

CORRECTION EXAMEN DE MECANIQUE DU POINT

5x4/20,5

Exercice 1 : Pendule simple dans un référentiel en mouvement

- 1- $\vec{O'M} = l\vec{e}_\rho$ $\Rightarrow \vec{V}(M/R) = \left[\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right]_{\mathcal{R}'} = l \left[\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} \right]_{\mathcal{R}'} = l\dot{\varphi}\vec{e}_\theta$ $\mathcal{O}_{1,5}$
- 2- a) $\mathcal{R}'$ en translation rectiligne non uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ $\Rightarrow \mathcal{R}'$ non galiléen. $\mathcal{O}_{1,5}$
- b) $\vec{V}_c(M, \mathcal{R}/\mathcal{R}) = \vec{V}(O' \in \mathcal{R}'/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \times \vec{O'M} = \left[\frac{d\vec{O'O'}}{dt} \right]_{\mathcal{R}'} = \left[\frac{d(a \sin(\omega t)\vec{e}_y)}{dt} \right]_{\mathcal{R}'} = a\omega \cos(\omega t)\vec{e}_y$ $\mathcal{O}_{1,5}$
- c) $\vec{a}_c(M, \mathcal{R}/\mathcal{R}) = \vec{a}(O' \in \mathcal{R}'/\mathcal{R}) + \underbrace{\left[\frac{d\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}{dt} \right]_{\mathcal{R}'} \times \vec{O'M}}_{=0} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \times \left[\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right]_{\mathcal{R}'} = \underbrace{\left[\frac{d\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}{dt} \right]_{\mathcal{R}'} \times \vec{O'M}}_{=0} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \times \vec{O'M} = -a\omega^2 \sin(\omega t)\vec{e}_y$ $\mathcal{O}_{1,5}$
- d) $\vec{a}_c(M, \mathcal{R}/\mathcal{R}) = 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \times \vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{0}$ $\mathcal{O}_{1,5}$
- e) * LCV: $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}(M/\mathcal{R}') + \vec{V}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{\varphi}_\theta + a\omega \cos(\omega t)(\sin\varphi_\theta\vec{e}_\rho + \cos\varphi_\theta\vec{e}_\theta)$ $\mathcal{O}_{1,5}$
- * LCA: $\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \vec{a}(M/\mathcal{R}') + \vec{a}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) + \vec{a}_c(M, \mathcal{R}/\mathcal{R}) = -(\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho + \ddot{\varphi}\vec{e}_\theta) - a\omega^2 \cos(\omega t)(\sin\varphi_\theta\vec{e}_\rho + \cos\varphi_\theta\vec{e}_\theta)$ $\mathcal{O}_{1,5}$
- 3- $\Sigma \vec{F}(M/\mathcal{R}') = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{ic}$ $\mathcal{O}_{1,5}$
- * $\vec{F}_{ic} = \frac{1}{2}ma_c = m\omega^2 \sin(\omega t)\vec{e}_y$ et $\vec{F}_{ic} = -ma_c = 0$ $\mathcal{O}_{1,5}$
- * $\vec{T} = T\vec{e}_\rho$ ($T < 0$) et $\vec{P} = mg(\cos\varphi_\theta\vec{e}_\rho - \sin\varphi_\theta\vec{e}_\theta)$ $\mathcal{O}_{1,5}$
- * RFD: $\Sigma \vec{F}(M/\mathcal{R}') = m\vec{a}(M/\mathcal{R}')$ $\mathcal{O}_{1,5}$
- * Projection suivant $\vec{e}_\rho$: $-mg \sin \varphi + 0 + m\omega^2 \cos \varphi = m(\ddot{\varphi})$ $\mathcal{O}_{1,5}$
- $\Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = \omega^2 \cos \varphi = a\omega^2 \sin(\omega t) \cos \varphi$ $\mathcal{O}_{1,5}$
- * Projection suivant $\vec{e}_\theta$: $mg \cos \varphi + T + m\omega^2 \cos \varphi \sin(\omega t) = -m(\dot{\varphi}^2)$ $\mathcal{O}_{1,5}$
- $\Rightarrow T = -m[\dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi + \omega^2 \sin(\omega t) \sin \varphi]$ $\mathcal{O}_{1,5}$
- 4- a) $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m[\vec{V}(M/\mathcal{R}')^2] = \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi})^2 = \mathcal{E}_c$ $\mathcal{O}_{1,5}$
- b) * La tension $\vec{T}$ étant perpendiculaire au déplacement, elle ne travaille pas, et ne peut donc dériver d'une énergie potentielle. $\mathcal{O}_{1,5}$
- * La force d'inertie de Coriolis: $\vec{F}_{ic} = \vec{0}$, car pas de rotation de $\mathcal{R}'/\mathcal{R}$. $\mathcal{O}_{1,5}$
- * Énergie potentielle de pesanteur: $d\mathcal{E}_{pp} = -\delta W(\vec{P}) = -mgdx \Rightarrow \mathcal{E}_{pp} = -mg(\cos \varphi + \text{cte})$ $\mathcal{O}_{1,5}$
- * Énergie potentielle d'inertie d'entraînement: $d\mathcal{E}_{pic} = -\delta W(\vec{F}_{ic}) = +ma_c \cdot d\vec{l} = -m\omega^2 a \sin(\omega t) dy$; y étant fonction du temps, il est impossible d'intégrer pour trouver $\mathcal{E}_{pic}$. $\mathcal{O}_{1,5}$

Exercice 2 : Mouvement d'un satellite (S) de la Terre (T)

- 1- a) $\vec{F}_{grav}(M) = -GM_T M_S \frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{GM_T M_S}{r^2} \vec{e}_r$ $\mathcal{O}_{1,5}$
- b) $\vec{F}_{grav}(M) = M_S \vec{\mathcal{A}}(S) \Rightarrow \vec{\mathcal{A}}(S) = -\frac{GM_T}{r^2} \vec{e}_r$ $\mathcal{O}_{1,5}$
- 2- a) $\mathcal{R}_0$: centre T et trois axes correspondant à 3 étoiles considérées comme fixes. $\mathcal{O}_{1,5}$
- b) $\left[\frac{d\vec{L}_T(M/\mathcal{R}_0)}{dt} \right] = \Sigma \vec{\mathcal{M}}_T(\vec{F}(M/\mathcal{R}_0))$ $\mathcal{O}_{1,5}$
- c) * La seule force s'exerçant sur S est dirigée suivant $\vec{e}_r$ (force centrale) $\mathcal{O}_{1,5}$
- * $\Sigma \vec{\mathcal{M}}_T((M/\mathcal{R}_0)) = \vec{0} \Rightarrow \left[\frac{d\vec{L}_T(M/\mathcal{R}_0)}{dt} \right] = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_T(M/\mathcal{R}_0) = \text{cte}$ $\mathcal{O}_{1,5}$
- * $\vec{L}_T(M/\mathcal{R}_0) = \vec{r} \times M_S \vec{v}(S/\mathcal{R}_0) = \text{cte} \Rightarrow \vec{r} \times \vec{v}(S) = \text{cte}$ dans un même plan: mouvement plan $\mathcal{O}_{1,5}$
- d) $\vec{L}_T(M/\mathcal{R}_0) = \|\vec{L}_T(M/\mathcal{R}_0)\| \vec{e}_z \Rightarrow \vec{e}_z = \frac{\vec{L}_T(M/\mathcal{R}_0)}{\|\vec{L}_T(M/\mathcal{R}_0)\|}$ $\mathcal{O}_{1,5}$
- e) $\vec{L}_T(M/\mathcal{R}_0) = \vec{r} \times \vec{p} = r^2 \dot{\theta} \vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{v}(S/\mathcal{R}_0) = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta$ $\mathcal{O}_{1,5}$
- f) $\vec{L}_T(M/\mathcal{R}_0) = \text{cte} \Rightarrow M_S r^2 \dot{\theta} = \text{cte}$ $\mathcal{O}_{1,5}$
- * aire dA balayée par $\vec{r}$ pendant $dt = \frac{1}{2} r \cdot r d\theta = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} dt = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} dt \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} \frac{L_T}{M_S} = \text{cte}$: loi des aires (le rayon vecteur balaie des aires égales en des temps égaux). $\mathcal{O}_{1,5}$
- * Constante des aires: $C = r^2 \dot{\theta}$ $\mathcal{O}_{1,5}$
- g) mouvement circulaire $\Rightarrow r = \text{cte} \Rightarrow \vec{v}(S/\mathcal{R}_0) = r\dot{\theta} \vec{e}_\theta = \frac{C}{r} \vec{e}_\theta = \text{cte} \Rightarrow \|\vec{v}(S/\mathcal{R}_0)\| = \frac{C}{r}$: mouvement uniforme $\mathcal{O}_{1,5}$
- h) $\frac{d(S/\mathcal{R}_0)}{dt} = r\dot{\theta} \vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2 \vec{e}_r \Rightarrow \frac{d(S/\mathcal{R}_0)}{dt} = -r\dot{\theta}^2 \vec{e}_r$ (mouvement uniforme: $\dot{\theta} = \text{cte} \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$) $\mathcal{O}_{1,5}$
- i) RFD: $\Sigma \vec{F}(M/\mathcal{R}_0) = M_S \vec{a}(M/\mathcal{R}_0)$ $\mathcal{O}_{1,5}$
- * $-\frac{GM_T M_S}{r^2} \vec{e}_r = -M_S r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r = -M_S \frac{v^2}{r} \vec{e}_r \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$ $\mathcal{O}_{1,5}$
- j) $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} r \frac{1}{r} \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$ $\mathcal{O}_{1,5}$
- k) $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$ $\mathcal{O}_{1,5}$
- l) * satellite géostationnaire: fixe par rapport à la Terre ou toujours à la verticale du même point de la Terre $\mathcal{O}_{1,5}$
- * $h \approx 36.000 \text{ km}$ $\mathcal{O}_{1,5}$