

ANALOGIES ET DIFFERENCES

PHYSIQUE I : Interprétation d'un mouvement dans deux référentiels

A - Etude dans le référentiel R du laboratoire :

A-1 Les forces sont : le poids, la réaction et la force élastique.
Le poids et la réaction du support se compensent.

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{f} = \vec{0} : \text{Il y a conservation du moment cinétique.}$$

$$A-2-1 \vec{L}_o = cte = \vec{L}_o(t=0) = \vec{0} :$$

Le mouvement est rectiligne suivant l'axe Ox.

$$A-2-2 \text{ D'après la relation fondamentale, } m \frac{d^2 l}{dt^2} + k(l - l_o) = 0 : \frac{d^2 l}{dt^2} + \frac{k}{m}(l - l_o) = 0$$

$$l = l_o + A \cos(\omega_o t) + B \sin(\omega_o t) \text{ avec } \omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

$$A \text{ t=0, } l = 1.2l_o \text{ et } \frac{dl}{dt} = 0 \text{ alors } A = 0.2l_o \text{ et } B = 0 : l = l_o + 0.2l_o \cos(\omega_o t)$$

$$\text{et } l \in [0.8l_o, 1.2l_o]$$

$$A-3-1 \vec{L}_o = mr^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \vec{k}$$

$$\vec{L}_o = cte = \vec{L}_o(t=0) = ml_1^2 \omega \vec{k}$$

$$A-3-2 \text{ La tension dérive d'une énergie potentielle, } E_p = \frac{1}{2} k (r - l_o)^2$$

Il n'y a pas à tenir compte de l'énergie potentielle de pesanteur car le mouvement est dans un plan perpendiculaire à $\vec{g}$. E_p est constante.

Le poids et la réaction ne travaillent pas ici. Il y a conservation de l'énergie mécanique car la tension dérive d'une énergie potentielle.

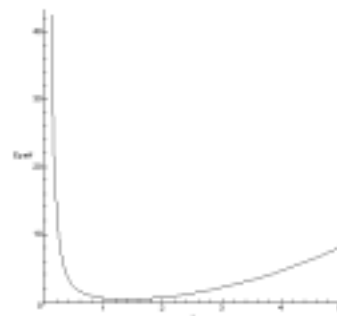
$$E_m = \frac{1}{2} ml_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2} k (l_1 - l_o)^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} m \left(\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} k (r - l_o)^2.$$

$$A-3-3 E_m = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} m \frac{l_1^4 \omega^2}{r^2} + \frac{1}{2} k (r - l_o)^2 \right)$$

$$E_{p_{eff}} = \frac{1}{2} m \frac{l_1^4 \omega^2}{r^2} + \frac{1}{2} k (r - l_o)^2$$

NB : (G) = graphe.

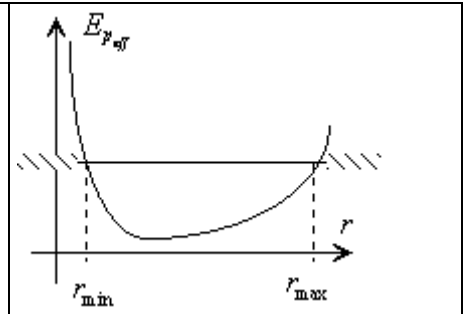


A-3-4 Si on superpose au graphe précédent, la droite $E_m = \text{cte}$, la trajectoire est toujours bornée entre 2 cercles de rayons $r_{\min}$ et $r_{\max}$. La masse ne peut donc pas s'éloigner indéfiniment.

Autre méthode possible :

Comme L est constant, OM est borné donc M ne peut aller à l'infini

NB : Chaque correcteur appréciera une réponse à sa juste valeur.



A-3-5 La vitesse ne peut s'annuler à cause de la conservation du moment cinétique.

A-3-6 La distance r ne peut s'annuler à cause de la conservation du moment cinétique.

On peut le constater aussi sur la barrière de potentielle, $r > r_{\min}$.

A-4-1 Si $r = l_1$ est constant, à cause de la conservation du moment cinétique, $\frac{d\theta}{dt} = \frac{ml_1^2\omega}{mr^2} = \omega$: le mouvement est circulaire uniforme.

A-4-2 Le mouvement circulaire correspond au minimum de $E_{p_{\text{eff}}}$ pour $r = l_1$.

Or, $\frac{dE_{p_{\text{eff}}}}{dr} = -m \frac{l_1^4 \omega^2}{r^3} + k(r - l_o) = 0$ pour $r = l_1$ alors $m \frac{l_1^4 \omega^2}{l_1^3} = k(l_1 - l_o) : (k - m\omega^2)l_1 = kl_o :$

$$l_1 = \frac{kl_o}{k - m\omega^2} \text{ si } \omega < \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Autre méthode :

On peut utiliser la base de Frenet : $m \frac{v^2}{l_1} = k(l_1 - l_o) = m \frac{l_1^2 \omega^2}{l_1}$ alors $l_1 = \frac{kl_o}{k - m\omega^2}$

B - Etude dans un référentiel R' en rotation uniforme autour d'un axe fixe :

B-1 $\vec{f}_{ie} = m\omega^2 r \vec{e}_r$; $\vec{f}_{ic} = -2m\omega \vec{k} \wedge \frac{dr}{dt} \vec{e}_r = -2m\omega \frac{dr}{dt} \vec{e}_\theta$

B-2 $\vec{f}_{ie} = m\omega^2 r \vec{e}_r$ dérive d'une énergie potentielle $E_p = -\frac{1}{2} m\omega^2 OM^2 = -\frac{1}{2} m\omega^2 r^2 + \text{démonstration(D)}$

B-3 La force de Coriolis ne travaille pas car orthogonale à la vitesse.

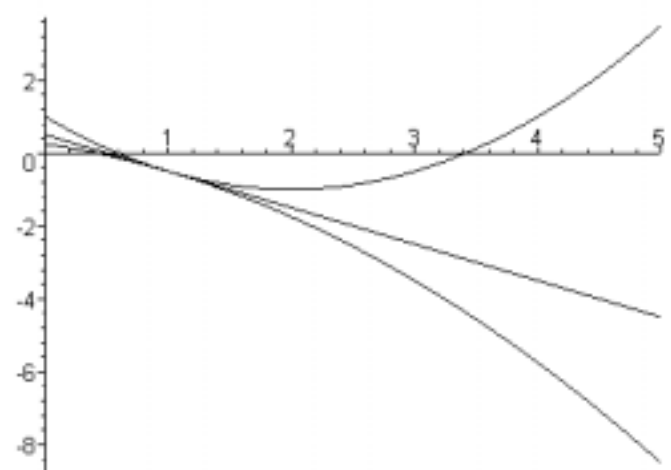
B-4 $E_p = \frac{1}{2} k(r - l_o)^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 r^2$

$$\frac{dE_p}{dr} = k(r - l_o) - m\omega^2 r \text{ soit}$$

$$\frac{dE_p}{dr} = (k - m\omega^2)r - kl_o$$

On a 3 cas possibles :

- $\omega < \sqrt{\frac{k}{m}}$
- $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- $\omega > \sqrt{\frac{k}{m}}$



B-5 L'équilibre correspond à $\frac{dE_p}{dr} = 0$ alors $k(l_2 - l_o) = m\omega^2 l_2 : l_2 = \frac{kl_o}{k - m\omega^2}$ si $\omega < \sqrt{\frac{k}{m}}$.

L'équilibre est stable car on a un minimum d'énergie potentielle.

Le mouvement est circulaire uniforme.

B-6 On trouve $l_1=l_2$: les deux référentiels sont donc équivalents pour le mouvement circulaire et uniquement pour ce cas bien sûr !!