

Solution

I Modèle simplifié de la suspension

1) À l'équilibre, la tension du ressort d'une des quatre suspensions compense le quart du poids du châssis (le châssis n'est soumis à aucun frottement visqueux puisque la vitesse relative d'un amortisseur est nulle à l'équilibre) :

$$\vec{0} = \vec{T} + \frac{\vec{P}}{4} \Rightarrow \text{selon } \vec{e}_z : 0 = -k(L_e - L_0) - \frac{Mg}{4} \quad (1)$$

Soit : $L_e = L_0 - \frac{Mg}{4k}$ et $z_0 = L_e + R = L_0 - \frac{Mg}{4k} + R$.

2.a) En appliquant le principe fondamental de la dynamique au quart du châssis associé à une suspension :

$$\frac{M}{4} \overrightarrow{a_{\text{chassis}/\mathcal{R}}} = \vec{T} + \frac{\vec{P}}{4} + \vec{F}_{\text{frot}}$$

avec $\overrightarrow{a_{\text{chassis}/\mathcal{R}}} = \ddot{z} \vec{e}_z$ (mouvement vertical), $\vec{T} = -k(L - L_0) \vec{e}_z$ et $\vec{F}_{\text{frot}} = -a(\dot{z}_C - \dot{z}_A) \vec{e}_z = -a \dot{z}_C \vec{e}_z = -a \dot{z} \vec{e}_z$. Soit, en projection selon $\vec{e}_z$:

$$\frac{M}{4} \ddot{z} = -k(L - L_0) - \frac{Mg}{4} - a \dot{z} \quad (2)$$

Soit, en faisant **(2) - (1)** : $\frac{M}{4} \ddot{z} = -k(L - L_e) - a \dot{z} = -k(z - z_0) - a \dot{z}$; d'où :

$$\ddot{z} + \alpha \dot{z} + \beta z = \delta \quad (E) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{4a}{M} \quad \beta = \frac{4k}{M} \quad \delta = \frac{4k}{M} z_0$$

2.b) Pour que le retour à la position d'équilibre soit le plus rapide possible, il faut qu'il corresponde à un **régime libre critique**.

Le régime critique est obtenu lorsque le discriminant de l'équation caractéristique associé à l'équation différentielle (E) est nul :

$$\delta = \alpha^2 - 4\beta = 0 \iff \boxed{\alpha = 2\sqrt{\beta}} \iff \frac{16a^2}{M^2} = 4 \frac{4k}{M} \iff \boxed{a = \sqrt{kM}}$$

2.c) La solution $z(t)$ de (E) se décompose en une solution particulière de l'équation avec second membre (z_P) et de la solution générale de l'équation homogène ($z_G(t)$).

• $\boxed{z_P = z_0}$.

• L'équation caractéristique de (E) ($r^2 + \alpha r + \beta = 0$) admet, pour le régime critique, une racine double :

$$r = -\frac{\alpha}{2} = -\frac{2a}{M} = -2\sqrt{\frac{k}{M}} \equiv -\omega_0$$

Alors, $\boxed{z_G(t) = (A + Bt) e^{-\omega_0 t}}$.

• Ainsi : $z(t) = z_G(t) + z_P = (A + Bt) e^{-\omega_0 t} + z_0$.

Les constante d'intégration se déduisent des conditions initiales :

◦ $z(t=0) = z_0 - h = A + z_0 \Rightarrow \underline{A = -h}$;

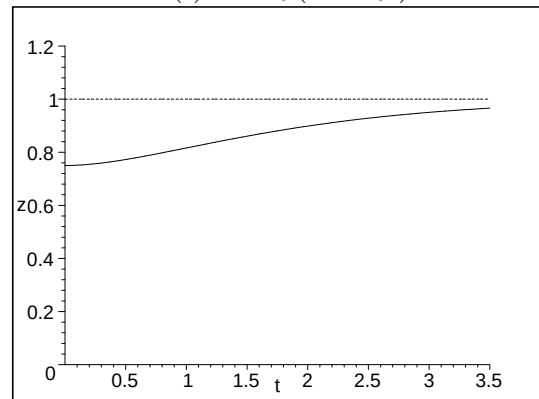
◦ $\dot{z}(t=0) = 0 = -A\omega_0 + B \Rightarrow \underline{B = A\omega_0 = -h\omega_0}$.

$$\boxed{z(t) = z_0 - h(1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t}}$$

2.d) $z(t) = z_0 - h(1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t} \Rightarrow \dot{z}(t) = h\omega_0^2 t e^{-\omega_0 t} > 0 \Rightarrow \ddot{z}(t) = h\omega_0(1 - \omega_0 t) e^{-\omega_0 t}$.

Ainsi, $z(t)$ est une fonction croissante dont la courbe admet :

- une tangente horizontale en $t = 0$ (car $\dot{z}(0) = 0$),
- un point d'inflexion M_1 pour $\ddot{z}(t_1) = 0$, soit $M_1 \left(t_1 = \frac{1}{\omega_0}, z_1 = z_0 - \frac{2h}{e} \right)$,
- une asymptote horizontale d'équation $z = z_0$ (retour à l'équilibre).



3.a) La nouvelle équation traduisant l'équilibre du véhicule en charge nominale est :

$$0 = -k(L'_e - L_0) - \frac{(M + 4m)g}{4} \quad (1')$$

(en introduisant la nouvelle longueur à l'équilibre L'_e du ressort correspondant à la nouvelle garde au sol z'_0 du châssis chargé par $4m$).

Tandis que l'équation du mouvement du châssis chargé selon $\vec{e}_z$ devient :

$$\frac{(M + 4m)}{4} \ddot{z} = -k(L - L_0) - \frac{(M + 4m)g}{4} - a \dot{z} \quad (2')$$

Soit, en faisant **(2') - (1')**, avec $L - L'_e = z - z'_0$:

$$\ddot{z} + \alpha' \dot{z} + \beta' z = \delta' \quad (E') \quad \text{avec} \quad \alpha' = \frac{4a}{M + 4m} \quad \beta' = \frac{4k}{M + 4m} \quad \delta' = \frac{4k}{M + 4m} z'_0$$

3.b) Le discriminant de l'équation caractéristique associée à (E') est (en se souvenant que $a = \sqrt{kM}$) :

$$\Delta' = \alpha'^2 - 4\beta' = \left(\frac{4a}{M+4m} \right)^2 - 4 \frac{4k}{M+4m} = \frac{16a^2 - 16k(M+4m)}{(M+4m)^2} = -\frac{64km}{(M+4m)^2} < 0$$

Ceci correspond à des racines complexes de l'équation caractéristique, donc à une **solution pseudo-périodique** de (E') , c'est-à-dire à une oscillation sinusoïdale amortie exponentiellement.

3.c) Pour déterminer la pseudo-période, il faut déterminer la pseudo-pulsation qui est la partie imaginaire commune aux deux racines $r_{1/2}$ de l'équation caractéristique :

$$r_{1/2} = -\frac{\alpha'}{2} \pm j \frac{\sqrt{|\Delta'|}}{2} = -\frac{\alpha'}{2} \pm j\omega$$

Soit : $\omega \equiv \frac{2\pi}{T} = \frac{4\sqrt{km}}{M+4m}$. Donc :

$$T = \frac{\pi}{2} \frac{M+4m}{\sqrt{km}}$$

3.d) On veut $T = \frac{\pi}{2} \frac{M+4m}{\sqrt{km}} = \frac{\pi}{3}$ s, soit :

$$k = \frac{9}{4} \frac{(M+4m)^2}{m} = 44\,100 \text{ N.m}^{-1} \quad \text{et donc :} \quad a = \sqrt{kM} = 6\,600 \text{ kg.s}^{-1}$$

II Étude de la réponse harmonique

Remarquons que sur le schéma et dans l'énoncé, la côte z par rapport à l'horizontale est désormais notée s !

1) Comportement sur une route difficile du véhicule chargé.

1.a) • la période spatiale ('distance entre deux bosses') correspond à $\gamma\lambda = 2\pi \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{\gamma}$

• Le véhicule roule selon (Ox) à la vitesse $V = \text{cte}$, donc, (avec un choix judicieux de l'origine des temps), $x = Vt$ et $e(x)$ peut s'écrire explicitement en fonction du temps t :

$$e(t) = e_m \cos(\gamma x) = e_m \cos(\gamma V t) = e_m \cos(\omega t) \Rightarrow \omega = \gamma V = 2\pi \frac{V}{\lambda}$$

Ce qui se retrouve en écrivant que la durée de parcours entre deux bosses est $T = \frac{\lambda}{V} = \frac{2\pi}{\omega}$.

1.b) • La force de frottement exercée par l'amortisseur sur le châssis est proportionnelle à la différence de vitesse de ses extrémités : $\vec{F}_{\text{frot}} = -a(\dot{z}_C - \dot{z}_A) \vec{e}_z = -a(\dot{s} - \dot{e}) \vec{e}_z$.

Donc, selon $\vec{e}_z$: $F_{\text{frot}} = -a(\dot{s} - \dot{e})$

• L'équation traduisant l'équilibre du véhicule en charge nominale est toujours :

$$0 = -k(L'_e - L_0) - \frac{(M+4m)g}{4} \quad (1'')$$

Tandis que l'équation du mouvement du châssis chargé selon $\vec{e}_z$ devient :

$$\frac{(M+4m)}{4} \ddot{s} = -k(L - L_0) - \frac{(M+4m)g}{4} - a(\dot{s} - \dot{e}) \quad (2'')$$

Soit, en faisant $(2'') - (1'')$, avec $L - L'_e = s - e - z'_0$:

$$\ddot{s} + \alpha' \dot{s} + \beta' s = f + \delta' \quad (*) \quad \text{avec} \quad \alpha' = \frac{4a}{M + 4m} \quad \beta' = \frac{4k}{M + 4m} \quad \delta' = \frac{4k}{M + 4m} z'_0$$

$$\text{et} \quad f = \alpha' \dot{e} + \beta' e$$

2) Régime forcé permanent.

2.a) Le régime forcé permanent est le régime des oscillations sinusoïdales de pulsation ω imposées au système une fois que le régime transitoire a disparu.

Il correspond à la solution particulière de l'équation différentielle. Il est de forme sinusoïdale et de pulsation ω .

2.b) • On cherche à résoudre, en notation complexes ($\underline{e} = e_m e^{j\omega t}$ et $\underline{s} = \underline{S} e^{j\omega t}$), l'équation :

$$\ddot{\underline{s}} + \alpha' \dot{\underline{s}} + \beta' \underline{s} = \underline{f}.$$

• On ne tient pas compte du terme δ' dans $(*)$ parce que seules les oscillations du châssis nous intéressent ; or δ' n'intervient que par l'ajout d'une constante ($z'_0 = s_0$) dans la solution particulière. (Négliger δ' revient, finalement, à translater le repère à la position d'équilibre s_0 .)

• En complexes, il vient : $\underline{S}(\beta' - \omega^2 + j\omega\alpha') = e_m(\beta' + j\omega\alpha')$, soit :

$$\underline{S} = e_m \frac{\beta' + j\omega\alpha'}{\beta' - \omega^2 + j\omega\alpha'} \quad \text{qui peut s'écrire :} \quad \underline{S} = e_m \frac{1 + j \frac{\Omega}{Q}}{1 - \Omega^2 + j \frac{\Omega}{Q}}$$

$$\text{avec :} \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega'_0} \quad \omega'_0 = \sqrt{\beta'} = \sqrt{\frac{4k}{M + 4m}} \quad Q = \frac{\omega'_0}{\alpha'} = \sqrt{\frac{M + 4m}{4M}}$$

$$\text{2.c) Donc :} \quad S = |\underline{S}| = e_m \sqrt{\frac{1 + \frac{\Omega^2}{Q^2}}{(1 - \Omega^2)^2 + \frac{\Omega^2}{Q^2}}} \quad \text{Et lorsque } \Omega = 1, \quad S_{(\Omega=1)} = e_m \sqrt{1 + Q^2}.$$

2.d) • On pose $u = \Omega^2$ et on dérive $g(u) = \left(\frac{S}{e_m}\right)^2 = \frac{1 + \frac{u}{Q^2}}{(1 - u)^2 + \frac{u}{Q^2}}$ par rapport à u :

$$\frac{dg}{du} = \dots \rightarrow \text{cette dérivée s'annule pour :} \quad \frac{1}{2Q^2} u^2 + u - 1 = 0.$$

Or, ce polynôme n'a qu'une seule racine positive ($u > 0$!) qui est :

$$u_m = Q^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{2Q^2}} - 1 \right) \Rightarrow \Omega_m = Q \sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{2Q^2}} - 1}$$

Ω_m est la pulsation réduite de résonance correspondant à une résonance des oscillations du châssis roulant sur la route ondulée.

$$\bullet \left(\frac{S_m}{e_m}\right)^2 = \frac{1 + \frac{u_m}{Q^2}}{(1 - u_m)^2 + \frac{u_m}{Q^2}}, \text{ avec, par définition de } u_m : \frac{1}{2Q^2} u_m^2 + u_m - 1 = 0$$

$$\text{Soit : } \frac{u_m}{Q^2} = \frac{2 - 2u_m}{u_m}. \text{ Donc :}$$

$$\left(\frac{S_m}{e_m}\right)^2 = \frac{\frac{2 - u_m}{u_m}}{(1 - u_m)^2 + 2 \frac{1 - u_m}{u_m}} = \frac{2 - u_m}{u_m(1 - u_m)^2 + 2(1 - u_m)} = \frac{2 - u_m}{(1 - u_m)(u_m - u_m^2 + 2)}$$

$$\text{Soit : } \left(\frac{S_m}{e_m}\right)^2 = \frac{2 - u_m}{(1 - u_m)(2 - u_m)(1 + u_m)} = \frac{1}{1 - u_m^2} \Rightarrow \boxed{\frac{S_m}{e_m} = \sqrt{\frac{1}{1 - \Omega_m^4}}}$$

$$\mathbf{2.e) \text{ AN : }} \quad \boxed{Q = 0,59 \quad \Omega_m = 0,75 \quad \frac{S_m}{e_m} = 1,2}$$

Rq : Situation où le facteur de qualité est faible, pour avoir une faible acuité à la résonance $\frac{S_m}{e_m}$.

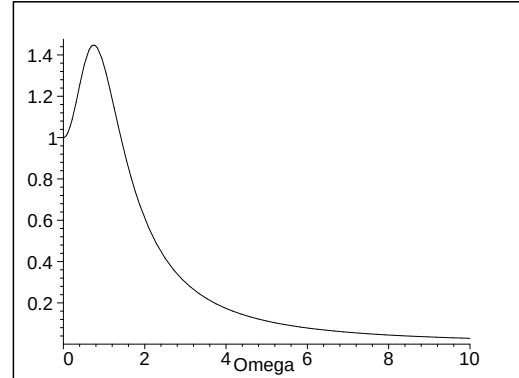
2.f) Cf. graphe ci-contre.

2.g) • Valeur de la pulsation propre du système :

$$\boxed{\omega'_0 = \sqrt{\frac{4k}{M + 4m}} = 2\sqrt{\frac{44\,100}{1\,400}} = 11,2 \text{ rad.s}^{-1}}$$

• Pour être à la résonance, il faut que

$$\omega = \omega_m = \Omega_m \omega'_0 = 0,75 \omega'_0 = 8,4 \text{ rad.s}^{-1}$$



Or, $\lambda = VT = V \frac{2\pi}{\omega}$, donc, la distance λ_m entre les ondulations du sol qui commande la résonance des oscillations du châssis si le véhicule roule à vitesse V constante est :

$$\boxed{\lambda_m = V \frac{2\pi}{\omega_m} = V \frac{2\pi}{0,75 \omega'_0} = 18,7 \text{ m}}$$

• Si les déformations sont plus rapprochées, $\lambda < \lambda_m$, soit $\omega > \omega_m$; on sort donc de la zone de résonance et les oscillations de la route sont alors mieux absorbées par le véhicule : $\frac{S}{e_m} < \frac{S_m}{e_m}$.

III Analogie électrique

1.a) En convention récepteur :

$$\boxed{u_R = R i_R \quad u_L = L \frac{di_L}{dt} \quad i_C = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}}$$

1.b) Aux trois relations précédentes correspondent les relations entre amplitudes complexes (en posant $\underline{i} = \underline{I} e^{j\omega t}$ et $\underline{u} = \underline{U} e^{j\omega t}$) :

$$\underline{U}_R = R \underline{I}_R \quad \underline{U}_L = jL\omega \underline{I}_L \quad \underline{U}_C = \frac{1}{jC\omega} \underline{I}_C$$

2.a) L'impédance du circuit est : $\underline{Z} = \underline{Z}_R // \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = \frac{jLR\omega}{R + jL\omega} + \frac{1}{jC\omega}$.

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{R - RCL\omega^2 + jL\omega}{jC\omega(R + jL\omega)}}$$

2.b) Diviseur de tension entre $\underline{U}_s$ et $\underline{U}_e$:

$$\frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}} = \frac{R + jL\omega}{R - RCL\omega^2 + jL\omega} = \frac{1 + j \frac{L\omega}{R}}{1 - CL\omega^2 + j \frac{L\omega}{R}}$$

$$\text{Soit : } \boxed{\frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{1 + j \frac{\Omega}{Q}}{1 - \Omega^2 + j \frac{\Omega}{Q}}} \quad \text{avec : } \boxed{\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}} \quad \boxed{Q = \frac{R}{L\omega_0} = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

3.a) La puissance dissipée par effet JOULE est en moyenne :

$$\langle \mathcal{P}_J \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T R i^2 dt = \frac{1}{2} R I_1^2 = \frac{1}{2} \frac{U_R^2}{R} = \frac{1}{2R} \frac{L^2 \omega^2}{1 + \frac{L^2 \omega^2}{R^2}} I^2 = \frac{1}{2R} \frac{L^2 \omega^2}{1 + \frac{L^2 \omega^2}{R^2}} \frac{C^2 \omega^2 \left(1 + \frac{L^2 \omega^2}{R^2}\right)}{(1 - LC\omega^2)^2 + \frac{L^2 \omega^2}{R^2}} U_e^2$$

$$\boxed{\langle \mathcal{P}_J \rangle = \frac{1}{2R} \frac{L^2 C^2 \omega^4}{(1 - LC\omega^2)^2 + \frac{L^2 \omega^2}{R^2}} U_e^2}$$

3.b) La puissance dissipée par frottement visqueux dans l'amortisseur est en moyenne :

$$\langle \mathcal{P}_f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{F}_{\text{frot}} \cdot (\dot{s} - \dot{e}) \vec{e}_z| dt = \frac{1}{T} \int_0^T a (\dot{s} - \dot{e})^2 dt = a \langle (\dot{s} - \dot{e})^2 \rangle.$$

Pour calculer $(\dot{s} - \dot{e})$, il faut prendre la partie réelle de $(\underline{\dot{s}} - \underline{\dot{e}})$, avec, d'après **II.2.b)** :

$$\underline{s} = \underline{e} \frac{\beta' + j\omega\alpha'}{\beta' - \omega^2 + j\omega\alpha'} \quad \text{et donc :} \quad \underline{\dot{s}} = \underline{\dot{e}} \frac{\beta' + j\omega\alpha'}{\beta' - \omega^2 + j\omega\alpha'}$$

$$\text{ce qui donne :} \quad \underline{\dot{s}} - \underline{\dot{e}} = \underline{\dot{e}} \frac{\omega^2}{\beta' - \omega^2 + j\omega\alpha'} = \underline{\dot{e}} \frac{\omega^2(\beta' - \omega^2 - j\omega\alpha')}{(\beta' - \omega^2)^2 + \alpha'^2 \omega^2}.$$

$$\text{Et donc : } \mathcal{R}e(\underline{\dot{s}} - \underline{\dot{e}}) = \dot{s} - \dot{e} = \frac{V_e \omega^2}{(\beta' - \omega^2)^2 + \alpha'^2 \omega^2} ((\beta' - \omega^2) \cos \omega t + \alpha' \omega \sin \omega t).$$

Alors : $\langle \mathcal{P}_f \rangle = a \langle (\dot{s} - \dot{e})^2 \rangle$, ce qui donne :

$$\langle \mathcal{P}_f \rangle = \frac{V_e^2 \omega^4}{((\beta' - \omega^2)^2 + \alpha'^2 \omega^2)^2} ((\beta' - \omega^2)^2 \underbrace{\langle \cos^2 \omega t \rangle}_{\frac{1}{2}} + \alpha'^2 \omega^2 \underbrace{\langle \sin^2 \omega t \rangle}_{\frac{1}{2}} + 2(\beta' - \omega^2)\alpha'\omega \underbrace{\langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle}_0).$$

$$\text{Finalement :} \quad \boxed{\langle \mathcal{P}_f \rangle = \frac{1}{2} a V_e^2 \frac{\omega^4}{(\beta' - \omega^2)^2 + \alpha'^2 \omega^2} = \frac{1}{2} a V_e^2 \frac{\left(\frac{m + M/4}{k}\right)^2 \omega^4}{\left(1 - \frac{m + M/4}{k} \omega^2\right)^2 + \frac{a^2}{k^2} \omega^2}}$$

3.c) la comparaison des deux expressions des puissances moyennes dissipées par le système mécanique en suspension et le circuit électrique permet d'identifier les **équivalences électromécaniques** suivantes :

$$\boxed{a \longleftrightarrow \frac{1}{R} \quad k \longleftrightarrow \frac{1}{L} \quad m + \frac{M}{4} \longleftrightarrow C \quad V_s \longleftrightarrow U_s}$$

Rq : Pour la dernière analogie, comparer $\frac{\underline{s}}{\underline{e}}$ avec $\frac{U_s}{U_e}$.