

DM16 • Comportement Routier d'une Automobile

Origine de l'épreuve : Concours EIA 1999 [ATS et TSI]

I Modèle simplifié de la suspension

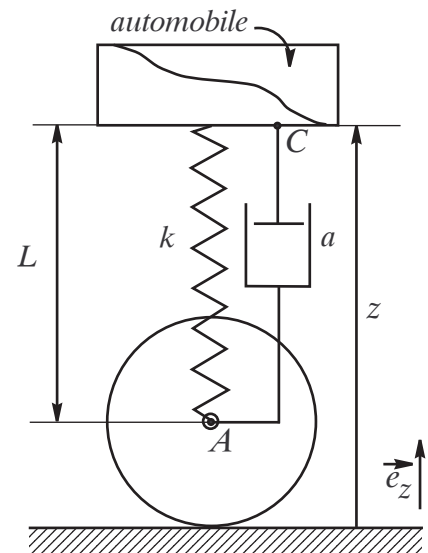
La suspension d'une automobile est habituellement assurée par quatre systèmes identiques indépendants montés entre le châssis du véhicule et chaque arbre de roue, et constitués chacun :

- d'un ressort métallique hélicoïdal de *constante de raideur* k et de longueur à vide L_0 ;
- d'un amortisseur tubulaire à piston à huile fixé parallèlement au ressort, exerçant une force résistante de frottement visqueux de *coefficient d'amortissement* a .

On suppose que la masse M du châssis est également répartie entre les quatre systèmes. Donc une suspension n'agit que sur le quart de la masse totale du châssis.

Les pneus, de rayon extérieur R , sont considérés comme entièrement rigides et n'interviennent pas dans l'étude.

Tous les déplacements verticaux seront comptés algébriquement vers le haut ($\vec{e}_z$ est le vecteur unitaire vertical).



1) Le véhicule étant immobile, sans freins, sur un sol horizontal, quelle est la longueur L_e des ressorts *au repos* et la garde au sol z_0 du véhicule correspondante ?

2) Lors d'un **essai dynamique à vide**, le châssis est abaissé d'une hauteur h , puis brusquement libéré sans vitesse initiale.

2.a) Établir l'équation différentielle de la position verticale $z(t)$ du châssis par rapport au sol sous la forme :

$$\ddot{z} + \alpha \dot{z} + \beta z = \delta \quad (E)$$

α , β et δ étant des constantes que l'on exprimera en fonction de a , k , M et z_0 .

2.b) On usine l'amortisseur de manière à obtenir un retour à la position d'équilibre final *le plus bref possible*.

Quelle doit être alors la valeur de α en fonction de β ?

En déduire celle de a en fonction de M et k .

2.c) Déterminer alors l'expression complète de la solution $z(t)$ en fonction de z_0 , h et $\omega_0 = 2\sqrt{\frac{k}{M}}$.

2.d) Tracer avec soin le graphe $z(t)$. (On prendra pour échelle $z_0 = 1$; $h = \frac{z_0}{4}$; $\omega_0 = 1$).

3) On effectue de nouveau le même essai (c'est-à-dire avec les mêmes conditions initiales), mais cette fois on fait un **essai en charge nominale** : le véhicule contient quatre masses identiques m également réparties sur les quatre systèmes {ressort-amortisseur}.

À cause de cette masse m au niveau de chaque suspension, la garde au sol n'est plus z_0 mais z'_0 . De même la longueur correspondante du ressort n'est plus L_e mais L'_e .

3.a) Établir la nouvelle équation différentielle vérifiée par $z(t)$, et l'écrire sous la forme :

$$\ddot{z} + \alpha' \dot{z} + \beta' z = \delta' \quad (E')$$

en exprimant les nouvelles constantes α' , β' et δ' en fonction de a , k , M , m et z'_0 .

3.b) Montrer que, dans ces conditions, le véhicule oscille.

3.c) Déterminer l'expression de la (pseudo-)période T des oscillations autour de la position d'équilibre final en fonction de k , M et m .

3.d) On souhaite obtenir $T = \frac{\pi}{3}$ s pour $M = 1000$ kg et $m = 100$ kg. En déduire la valeur de k puis de a .

II Étude de la réponse harmonique

1) On étudie maintenant le **comportement sur une route difficile** du véhicule avec ses quatre passagers de masse m chacun (soit une masse m et le quart de la masse M du châssis pour chaque suspension).

$z'_0 = s_0$ note toujours la garde au sol du châssis chargé par $4m$ sur un sol horizontal.

1.a) On modélise la route rectiligne dans la direction x par un sol ondulé sinusoïdalement autour de la côte de référence horizontale 0 suivant la relation :

$$e(x) = e_m \cos(\gamma x)$$

Quelle est la distance λ entre deux bosses exprimée en fonction de γ ?

Quelle est la pulsation ω des oscillations verticales imposées aux roues si le véhicule roule sur cette route à une vitesse constante V ?

1.b) On repère maintenant le châssis par sa position $s(t)$ par rapport à la côte de référence 0 liée au référentiel terrestre supposé galiléen.

Exprimer, selon $\vec{e}_z$, la force de frottement due à l'amortisseur en fonction de a , $\dot{s}$ et $\dot{e}$.
Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$ du châssis est de la forme :

$$\ddot{s} + \alpha' \dot{s} + \beta' s = f + \delta' \quad (*)$$

où f est une fonction du temps que l'on exprimera en fonction de e et de $\dot{e}$.

2) On étudie le **régime forcé permanent**.

2.a) Quelle est la signification de cette expression ?

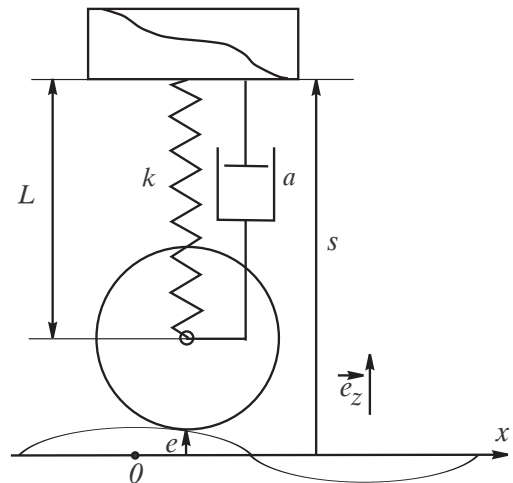
2.b) On utilise les notations complexes : $\underline{e} = e_m e^{j\omega t}$ et $\underline{s} = \underline{S} e^{j\omega t}$, $\underline{s}$ étant la solution de l'équation :

$$\ddot{\underline{s}} + \alpha' \dot{\underline{s}} + \beta' \underline{s} = \underline{f}.$$

Expliquer pourquoi on ne tient pas compte du terme δ' dans $(*)$ pour étudier les oscillations du châssis autour de sa position d'équilibre s_0 .

Exprimer l'amplitude complexe $\underline{S}$ des oscillations du châssis en fonction de e_m , ω , α' et β' .

Puis, l'écrire sous la forme :



$$\underline{S} = e_m \frac{1 + j \frac{\Omega}{Q}}{1 - \Omega^2 + j \frac{\Omega}{Q}}$$

où $\Omega \equiv \frac{\omega}{\omega'_0}$ est la pulsation réduite, ω'_0 et Q étant les constantes que l'on exprimera en fonction de α' et β' , puis de a , k , M et m .

2.c) En déduire l'amplitude S des oscillations en fonction de Ω et Q . Que vaut-elle si $\Omega = 1$?

2.d) Montrer que S atteint un maximum S_m pour une pulsation réduite Ω_m que l'on déterminera

en fonction de Q , et démontrer que $\frac{S_m}{e_m} = \sqrt{\frac{1}{1 - \Omega_m^4}}$.

2.e) Calculer Q , Ω_m et $\frac{S_m}{e_m}$.

2.f) Tracer avec soin le graphe (ou l'allure du graphe si la question précédente n'a pas été faite) donnant $\frac{S}{e_m}$ en fonction de Ω dans la plage $0 \leq \Omega \leq 10$.

2.g) Calculer la pulsation propre ω'_0 . En déduire la distance λ_m entre les ondulations du sol provoquant la résonance des oscillations du châssis si le véhicule roule à une vitesse V de 90 km.h^{-1} . Comment réagit le châssis sur des déformations plus rapprochées passées à la même vitesse ?