

A.2.2 Sismographe simple

13. Préliminaire : à l'équilibre, le solide (Σ) est soumis à son poids et à la tension du ressort :

$$\vec{0} = -mg\vec{u}_z + k(L_1 - L_0)\vec{u}_z$$

avec $L_1 = h - z_1$. On en déduit :

$$z_1 = h - L_0 - \frac{mg}{k}$$

Étude dans le référentiel non galiléen lié au boîtier :

Le référentiel lié au boîtier (noté $\mathcal{R}_S$) est en translation rectiligne non uniforme par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}$.

La force d'inertie d'entraînement ressentie par le solide (Σ) s'écrit : $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e = -m\frac{d^2 Z_S}{dt^2}\vec{u}_z$.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au solide (Σ) dans le référentiel lié au boîtier s'écrit :

$$m\overrightarrow{a(M)}_{/\mathcal{R}_S} = m\vec{g} + k(L(t) - L_0)\vec{u}_z - \lambda\frac{dz}{dt}\vec{u}_z - m\frac{d^2 Z_S}{dt^2}\vec{u}_z$$

En projection sur $\vec{u}_z$, on obtient :

$$m\frac{d^2 z}{dt^2} = -mg + k(h - z - L_0) - \lambda\frac{dz}{dt} + m\omega^2 Z_0 \cos(\omega t)$$

En soustrayant la relation à l'équilibre établie en préliminaire, on en déduit :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \omega^2 Z_0 \cos(\omega t)$$

C'est bien de la forme voulue avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{m\omega_0}{\lambda} = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}$.

Étude dans le référentiel fixe :

On peut également mener l'étude dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Dans ce cas, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m\overrightarrow{a(M)}/\mathcal{R} = m\vec{g} + k(L(t) - L_0)\vec{u}_z - \lambda\frac{dz}{dt}\vec{u}_z$$

avec $\overrightarrow{a(M)}/\mathcal{R} = \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2 (z(t) + Z_S(t))}{dt^2}\vec{u}_z = \frac{d^2 z}{dt^2} - \omega^2 Z_0 \cos(t)\vec{u}_z$. On retrouve bien évidemment la même équation.

ω_0 est homogène à une pulsation : $[\omega_0] = \left(\frac{MLT^{-2} \times L^{-1}}{M}\right)^{1/2} = T^{-1}$.

Q est sans dimension : $[\lambda] = \frac{MLT^{-2}}{LT^{-1}} = MT^{-1}$ a la même dimension que le produit $m\omega_0$.

ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur, Q son facteur de qualité.

14. On passe en notation complexe : $\underline{x}(t) = X_0 \exp(i(\omega t + \varphi)) = \underline{X} \exp(i\omega t)$. En injectant dans l'équation du mouvement, on obtient :

$$(-\omega^2 + i\omega\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2)\underline{X} = \omega^2 Z_0$$

donc :

$$\frac{X}{Z_0} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\omega \omega_0}{Q}} = \frac{u^2}{1 - u^2 + i \frac{u}{Q}}$$

avec $u = \frac{\omega}{\omega_0}$.

On prend le module de cette relation :

$$\frac{X_0}{Z_0} = \left| \frac{X}{Z_0} \right| = \frac{u^2}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}}$$

15. Quand u tend vers 0, $\frac{X_0}{Z_0}$ tend vers 0, ce que l'on retrouve sur le graphe.

Quand u tend vers l'infini, $\frac{X_0}{Z_0}$ tend vers 1, ce que le graphe confirme.

Ce filtre laisse passer les hautes fréquences et coupe les basses fréquences : c'est un filtre passe-haut.

Remarque : pour un facteur de qualité élevé (voir question suivante), on peut aussi considérer ce filtre comme un filtre passe-bande, même si cela ne correspond pas à son utilisation courante.

16. $Y(\xi) = (\xi^2 - 1)^2 + \frac{\xi^2}{Q^2}$ puis :

$$Y'(\xi) = 4\xi(\xi^2 - 1) + 2\frac{\xi}{Q^2}$$

La dérivée de la fonction $Y(\xi)$ s'annule en $\xi = 0$ ou $\xi = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$. La première solution correspond à u infini, ce qui traduit le fait que les courbes représentées sur le graphe ont une asymptote horizontale en l'infini. La seconde solution n'existe que si $Q > Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dans ce cas, $Y(\xi)$ présente un minimum donc $X_0(u)$ un maximum : il y a résonance.

Donc, si Q est inférieur à $Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, il n'y a pas de résonance, ce que montre le graphe.

17. On souhaite que le mouvement du solide restituent ceux du sol donc que : $X_0 = Z_0$. Il faut pour cela que $\omega \gg \omega_0$. Dans ces conditions, le solide (Σ) reste pratiquement immobile dans le référentiel galiléen, le ressort est si souple que le solide (Σ) ignore les mouvements du sol.

18. Si on choisit un facteur de qualité proche de la valeur critique Q_0 , la réponse du sismographe reproduit le mouvement du sol dès que ω est environ égale à $3\omega_0$ alors que pour un facteur de qualité plus faible, il faut une fréquence beaucoup plus grande pour que la courbe soit confondue avec son asymptote. La valeur Q_0 semble donc être le meilleur choix. Il correspond de plus à un temps d'amortissement du régime transitoire le plus court : les deux critères sont donc compatibles.

19. À l'équilibre, l'allongement du ressort est : $\Delta L = \frac{mg}{k} = \frac{g}{\omega_0^2}$. Sachant que $\omega^2 \gg \omega_0^2$,

on en déduit : $\Delta L \gg \frac{g}{4\pi^2 f^2}$ où f est la fréquence enregistrée. En prenant $f = 1$ Hz, on trouve $\Delta L \gg 25$ cm. Si on veut par exemple un facteur 3 entre ω et ω_0 , on obtient $\Delta L \simeq 2,3$ m : le sismographe est très encombrant !

Les sismographe construits selon ce modèle avaient des dimensions impressionnantes (masse de plusieurs centaines de kilogrammes, taille de plusieurs mètres).

A.2.3 Sismographe de LACOSTE

20. Le disque est soumis à son poids et à la tension du ressort. À l'équilibre :

$$\vec{\Omega A} \wedge (m\vec{g} + k\vec{AB}) = \vec{0}$$

ou encore :

$$(\ell \cos \theta \vec{u}_y + \ell \sin \theta \vec{u}_z) \wedge (-mg\vec{u}_z + k(-\ell \cos \theta \vec{u}_y + (d - \ell \sin \theta)\vec{u}_z)) = \vec{0}$$

ce qui donne :

$$k\ell \cos \theta (d - \ell \sin \theta) + k\ell^2 \sin \theta \cos \theta - mgl \cos \theta = 0$$

qui se simplifie en :

$$(kd - mg) \cos \theta = 0$$

21. À l'équilibre, $mg = kd$ ou $\cos \theta = 0$. On veut que $\theta = 0$ soit position d'équilibre, il faut donc que $mg = kd$. Cet équilibre est indifférent : le moment des forces en O est nul quel que soit l'angle θ , il reste nul tout au long du mouvement de la masse m .

22. Maintenant :

$$\vec{AB} = (-\ell \cos \theta + d \sin \alpha)\vec{u}_y + (d \cos \alpha - \ell \sin \theta)\vec{u}_z$$

L'énergie potentielle élastique associée au système disque-ressort s'écrit :

$$\mathcal{E}_{P,\text{ressort}} = \frac{1}{2}kAB^2 + \text{cste}_1$$

Tous calculs faits, on trouve :

$$\mathcal{E}_{P,\text{ressort}} = -k\ell d (\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta) + \text{cste}_1$$

23. $\mathcal{E}_{P,\text{pesanteur}} = mg\ell \sin \theta + \text{cste}_2$.

24. On veut que $\frac{d}{d\theta}(\mathcal{E}_{P,\text{ressort}} + \mathcal{E}_{P,\text{pesanteur}})(\theta = 0) = 0$ donc que : $-k\ell d \cos \alpha + mg\ell = 0$, ce qui donne bien : $\cos \alpha = \frac{mg}{kd}$.

25. L'énergie potentielle du système est :

$$\mathcal{E}_P = -k\ell d (\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta) + mg\ell \sin \theta + kd\ell \sin \alpha$$

en choisissant l'origine des énergies potentielles en $\theta = 0$.

Au voisinage de $\theta = 0$, elle s'écrit :

$$\mathcal{E}_P = -k\ell d \left(\sin \alpha \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) + \theta \cos \alpha \right) + mg\ell \theta + kd\ell \sin \alpha = \frac{1}{2} k d \ell \sin \alpha \theta^2$$

La conservation de l'énergie du système permet d'écrire :

$$\frac{1}{2}m\ell^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}kd\ell \sin \alpha \theta^2 = \mathcal{E}_0$$

où $\mathcal{E}_0$ est une constante. Après dérivation par rapport au temps et simplification par $\frac{d\theta}{dt}$, on obtient :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{kd \sin \alpha}{m\ell} \theta = 0$$

Remarque : on peut aussi commencer par dériver l'équation traduisant la conservation de l'énergie puis effectuer ensuite le développement limité au voisinage de $\theta = 0$. Dans ce cas, le développement limité se fera à l'ordre 1 et non 2 en θ .

26. On retrouve l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation : $\omega_1 = \sqrt{\frac{kd \sin \alpha}{m\ell}}$. Or $\sin \alpha = \cos \alpha \tan \alpha = \frac{mg}{kd} \tan \alpha$. On en déduit la relation demandée :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g \tan \alpha}{\ell}}$$

27. Le mouvement du disque ($\mathcal{D}$) reproduira celui du sol pour des pulsations ω telles que $\omega \gg \omega_1$. On peut ajuster ω_1 grâce à l'angle α et la choisir suffisamment faible pour enregistrer des secousses sismiques de plus grande période qu'avec le premier sismographe étudié.

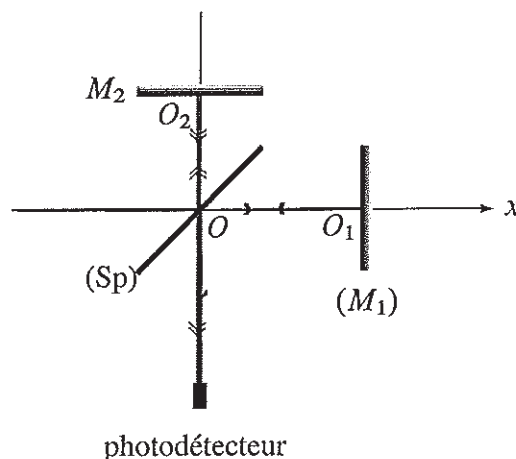
Si on veut $\omega \simeq 3\omega_1$ comme précédemment : $2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g \tan \alpha}} \simeq 30$, c'est-à-dire : $\frac{\ell}{\tan \alpha} \simeq 200$. Si on prend par exemple $\ell = 1$ m, on obtient $\alpha \simeq 0,3^\circ$.

A.2.4 Un sismographe optique

28. La puissance d'un laser Hélium-Néon utilisé par le professeur est de l'ordre de 1 mW. L'extension spatiale transverse du faisceau est de l'ordre du millimètre. La puissance par unité de surface (ou éclairement) est donc de l'ordre de :

$$\mathcal{E}_0 \sim \frac{10^{-3}}{10^{-6}} = 10^3 \text{ W.m}^{-2}$$

29.



30. Les deux ondes qui interfèrent ont chacune subi une transmission et une réflexion au niveau de la séparatrice. Leur éclairement est donc : $\mathcal{E}_1 = RT\mathcal{E}_0$. La conservation de l'énergie de l'onde au passage de la séparatrice impose : $R + T = 1$.

L'éclairement des ondes qui interfèrent est de la forme : $\mathcal{E} = R(1 - R)\mathcal{E}_0$.