

Préciser les connaissances et les compétences travaillées dans l'activité proposée.

12. Proposer le plan d'une séance de cours en classe de Terminale S sur le thème de la résonance mécanique.

A.2.2 Sismographe simple

Le sismographe vertical, représenté figure 5, est constitué d'un solide (Σ) de masse m suspendu à un ressort dont l'autre extrémité Ω est liée à un bâti rigide solidaire du sol en vibration. Un dispositif d'acquisition permet d'enregistrer le mouvement du solide par rapport au bâti. On souhaite que ce mouvement reproduise le plus fidèlement possible celui du sol par rapport au référentiel d'étude $\mathcal{R}$ supposé galiléen. On appelle $\mathcal{R}_S$ le référentiel lié au bâti rigide.

Le sol est supposé horizontal. Son mouvement vertical, lors d'une secousse sismique sinusoïdale de pulsation ω , est repéré par la cote, mesurée par rapport à $\mathcal{R}$:

$$Z_s(t) = Z_0 \cos(\omega t).$$

Le ressort, de masse négligeable, de constante de raideur k , de longueur au repos L_0 , a pour longueur $L(t)$ à l'instant t . Un amortisseur, relié au ressort, exerce sur le solide une action mécanique modélisée par la force : $\vec{f}_r = -\lambda \vec{v}_{/\mathcal{R}_S}(M)$, où $\vec{v}_{/\mathcal{R}_S}(M)$ est la vitesse du solide dans le référentiel $\mathcal{R}_S$.

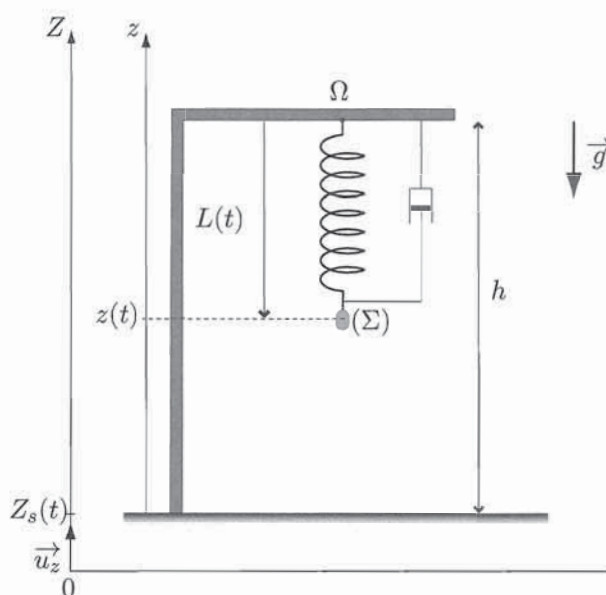


FIGURE 5 – Sismographe simple.

On note L_1 la longueur du ressort quand le solide est à l'équilibre en l'absence de secousse sismique. Le solide se situe alors à la cote z_1 repérée par rapport au bâti. La position du solide est repérée par : $x(t) = z(t) - z_1$, où $z(t)$ est également repéré par rapport au bâti du sismographe.

13. Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ lors de la secousse sismique. L'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega^2 Z_0 \cos(\omega t).$$

Donner les expressions, les significations physiques et les dimensions des grandeurs ω_0 et Q .

14. On cherche la réponse du sismographe sous la forme :

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

En posant : $u = \omega/\omega_0$, montrer que :

$$\frac{X_0}{Z_0} = \frac{u^2}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}}.$$

Le graphe représentant les évolutions de X_0/Z_0 en fonction de u , pour différentes valeurs du paramètre Q , est donné en figure 6 :

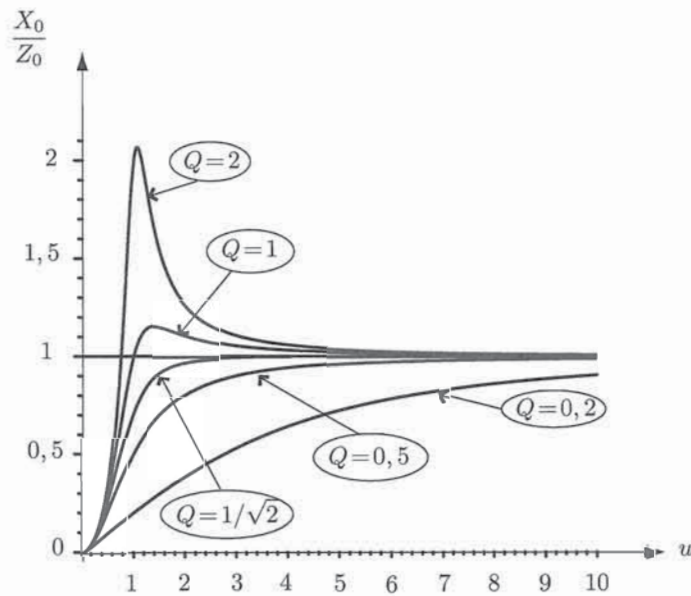


FIGURE 6 – Réponse fréquentielle du sismographe.

15. Vérifier que l'allure de ce graphe est compatible, à haute et basse fréquence, avec l'expression calculée.

Comment peut-on qualifier ce filtre ?

16. On pose $Y = \left(\frac{Z_0}{X_0}\right)^2$ et $\zeta = \frac{1}{u}$. En étudiant la fonction $Y(\zeta)$, montrer qu'il ne peut pas y avoir résonance si Q est inférieur à une valeur limite Q_0 à déterminer.

17. Comment faut-il choisir la pulsation propre ω_0 par rapport à la pulsation ω de la secousse sismique ? Justifier physiquement ce résultat.

18. Quel est le meilleur choix pour le paramètre Q , en termes de fidélité de la réponse et de durée du régime transitoire ?

19. Quel est l'ordre de grandeur de l'allongement du ressort à l'équilibre d'un sismographe optimisé pour détecter des ondes sismiques dont la période est de l'ordre de la seconde ? Commenter.

A.2.3 Sismographe de LACOSTE

Pour enregistrer fidèlement des signaux de période plus importante, un autre modèle de sismographe, appelé sismographe de Lacoste, est utilisé.

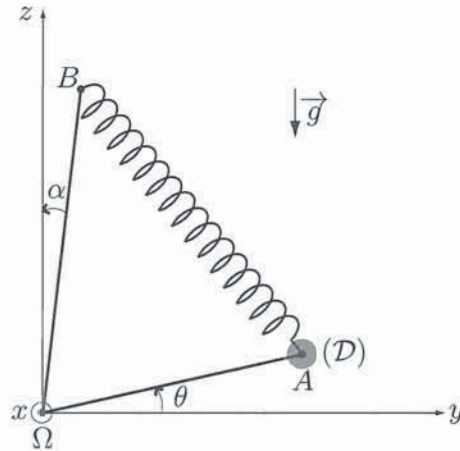


FIGURE 7 – Sismographe de Lacoste.

Comme le sismographe simple, le sismographe de Lacoste, schématisé sur la figure 7, est solidaire d'un bâti. Une tige métallique ΩA , de masse négligeable, peut tourner librement autour de l'axe Ωx . À l'extrémité A de cette tige est accroché un disque ($\mathcal{D}$) de masse m assimilé à un point matériel. Un ressort de masse négligeable, de constante de raideur k , de longueur à vide nulle, relie l'extrémité A de la tige à l'extrémité B d'une autre tige métallique ΩB , immobile par rapport au bâti. L'angle fixe entre la tige ΩB et la verticale ascendante Ωz est noté α . Le ressort AB est toujours rectiligne.

Les longueurs des tiges sont respectivement : $\Omega B = d$ et $\Omega A = \ell$.

L'angle θ entre l'axe Ωy et la tige ΩA peut varier entre $-\pi/2$ et $\pi/2 - \alpha$.

Dans un premier temps, on suppose $\alpha = 0$.

20. Établir la condition d'équilibre du disque et montrer que cette condition peut s'écrire :

$$(kd - mg) \cos \theta = 0.$$

21. À quelle condition la position $\theta = 0$ est-elle une position d'équilibre ? Comment qualifier cet équilibre ?

Dans la pratique, la condition précédente ne peut jamais être exactement réalisée et le dispositif se stabilise en $\theta = \pm\pi/2$. Pour remédier à cela, la tige ΩB est inclinée d'un angle α .

22. Déterminer l'énergie potentielle élastique associée au système disque-ressort en fonction de θ .

23. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur du disque en fonction de θ .

24. Montrer que la position $\theta = 0$ est une position d'équilibre pour le disque à condition que $\cos \alpha = mg/kd$. Par la suite, cette condition est supposée vérifiée.

25. Établir l'équation différentielle associée au mouvement du disque autour de la position d'équilibre $\theta = 0$.

26. Montrer que la pulsation des oscillations de petite amplitude du disque s'exprime sous la forme :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g \tan \alpha}{\ell}}.$$

Le dispositif est soumis à une secousse sismique au cours de laquelle le mouvement vertical du sol est toujours décrit par une vibration de la forme : $Z_s(t) = Z_0 \cos(\omega t)$.

On admet qu'en présence d'un dispositif amortisseur semblable à celui du sismographe simple, l'équation différentielle associée au mouvement du disque peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz}{dt} + \omega_1^2 z = \omega^2 Z_0 \cos(\omega t),$$

en posant $z = \ell \theta$.

27. Expliquer l'intérêt de ce dispositif par rapport au sismographe simple. Proposer des valeurs pertinentes de l'angle α et de la longueur ℓ pour étudier des ondes sismiques de période 10 secondes.

A.2.4 Un sismographe optique

Des méthodes optiques ont été développées depuis une cinquantaine d'années pour étudier les vibrations d'une structure mécanique sous l'effet d'un séisme. L'une de ces méthodes¹ utilise un interféromètre de Michelson dont l'un des miroirs peut se déplacer dans une direction perpendiculaire à son plan.

L'interféromètre de Michelson

Un schéma simplifié d'interféromètre de Michelson est représenté en figure 8 :

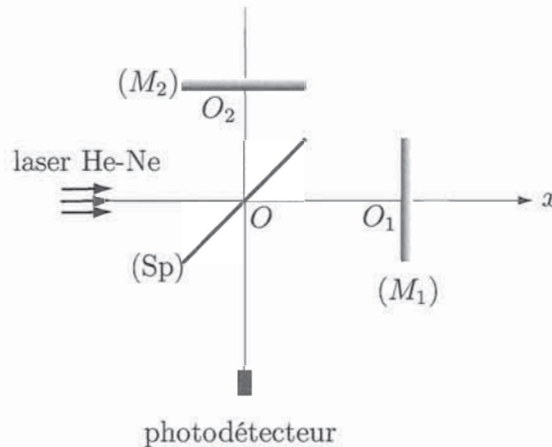


FIGURE 8 – Interféromètre de Michelson vu de dessus.

Le dispositif est éclairé par un laser Hélium-Néon. La lame séparatrice (Sp) a un facteur de réflexion en énergie R et un facteur de transmission en énergie T . Les deux miroirs sont perpendiculaires à leur axe. Un photodétecteur est utilisé pour mesurer l'éclairement en sortie de l'interféromètre.

L'éclairement, puissance moyenne transportée par l'onde par unité de surface perpendiculaire à sa direction de propagation, est proportionnel à la moyenne du carré de l'amplitude du champ électrique associé à l'onde.

1. Germán Da Costa, Gerardo Kiedansky et Ricardo Siri, Am. J. Phys. **56**, 993 (1988)