

EXAMEN DE MECANIQUE - 2H

Les grandeurs vectorielles sont écrites en gras

Mécanique du point

Mouvement d'une particule chargée dans des champs électrique et magnétique croisés (les parties 1, 2-1 et 2-2 sont indépendantes)

1- Mouvement sous l'effet du champ magnétique

Une particule M de masse m et de charge q se déplace dans un champ magnétique stationnaire et uniforme, $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z$. On note R ($O \mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z$) le référentiel d'observation. Le champ magnétique exerce sur la charge en mouvement l'unique force :

$$\mathbf{F}_B = q \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \quad \text{où } \mathbf{v} = \mathbf{v}_{M/R}, \text{ le vecteur vitesse de } M \text{ observé dans } R.$$

1-1-a : A partir de la relation fondamentale de la dynamique, déduire les équations différentielles scalaires relatives aux composantes v_x , v_y et v_z de $\mathbf{v}$. (ne pas les résoudre)

1-1-b : Vérifier que la solution suivante convient :

$$v_x = -A \cos(\omega t) \quad \text{avec } \omega = qB/m$$

$$v_y = A \sin(\omega t)$$

$$v_z = \text{constante} = D$$

1-1-c : Déterminer A et D lorsque la vitesse initiale de la particule est $\mathbf{v}(t=0) = -v_0 \mathbf{e}_x$.

Calculer alors la norme de la vitesse.

1-1-d : Retrouver ce résultat par le théorème de l'énergie cinétique de la façon suivante :

- Que vaut le travail de la force magnétique?
- Enoncer le théorème de l'énergie cinétique
- En déduire l'énergie cinétique puis la norme de la vitesse.

1-2-a : Déterminer $x(t)$ et $y(t)$ dans le cas où la particule est en O à l'instant $t=0$.

1-2-b : En déduire que la trajectoire est un cercle de centre $C(a, 0)$ et de rayon $a = mv_0/qB$

2- Mouvement sous l'effet de champs électrique et magnétique croisés

La particule est maintenant observée dans un référentiel $R_1(O_1 \mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z)$ tel que O_1 a pour vitesse dans R : $\mathbf{v}_{O_1/R} = -v_0 \mathbf{e}_x$. La particule est au repos à l'instant $t=0$ et se met en mouvement sous le seul effet des champs croisés suivants :

- Champ magnétique $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z$, exerçant la force $\mathbf{F}_B = q \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{B}$ où $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{M/R_1}$ est le vecteur vitesse de M observé dans R_1 .
- Champ électrique $\mathbf{E} = E \mathbf{e}_x$, exerçant la force $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$.

2-1-a : Ecrire les nouvelles équations différentielles relative aux composantes v_{x1} , v_{y1} et v_{z1} de $\mathbf{v}_1$

2-1-b : La solution générale de ces équations différentielles est (vous n'avez pas à le démontrer) :

$$v_{x1} = -A_1 \cos(\omega t) + E/B \quad \text{avec } \omega = qB/m$$

$$v_{y1} = A_1 \sin(\omega t)$$

$$v_{z1} = \text{constante} = D_1$$

2-1-b-i : Déterminer A_1 et D_1 lorsque $\mathbf{v}_1(t=0) = \mathbf{0}$.

2-1-b-ii : Pourquoi peut-on affirmer que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - v_0 \cdot \mathbf{e}_x$? Quelle doit être la valeur de v_0 pour que v_{x1} et v_{y1} aient la même expression que v_x et v_y au 1-1-c ?

2-2 Etude cinématique

Pour alléger les notations, on décrira le mouvement de la particule dans R_1 par les équations :

$$v_{x1} = -a\omega \cos(\omega t) + a\omega \quad \text{et} \quad \varphi(t) = \omega t$$

$$v_{y1} = a\omega \sin(\omega t)$$

$$v_{z1} = 0$$

2-2-a : Exprimer $x_1(t)$, $y_1(t)$ et $z_1(t)$ sachant que la particule est en O_1 à l'instant $t = 0$

2-2-b : Calculer la norme du vecteur vitesse en fonction de a , ω et $\varphi/2$.

Pour cela, on utilisera les relations trigonométriques suivantes :

$$1 - \cos\alpha = 2 \cdot \sin^2 \alpha/2$$

$$\sin\alpha = 2 \cdot \sin\alpha/2 \cdot \cos\alpha/2$$

Pour quelles valeurs de $\varphi(t)$ la norme de la vitesse est-elle nulle ?

2-2-c : Calculer les composantes cartésiennes puis la norme du vecteur accélération $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_{M/R1}$

2-2-d : Ecrire la relation donnant les composantes de l'accélération dans la base locale de Frenet

2-2-e : Calculer successivement :

i : l'accélération tangentielle,

ii : l'accélération normale,

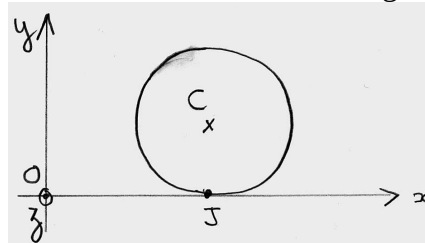
iii : le rayon de courbure de la trajectoire.

Que vaut ce rayon de courbure aux trois instants tels que : $\varphi=0$, $\varphi=\pi$ et $\varphi=2\pi$?

Mécanique du solide

(les parties 1,2 et 3 sont indépendantes)

Un disque D homogène, de masse m , de rayon a et de centre $C(x, a)$ se déplace sur l'axe Ox du référentiel $R(O \mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z)$ tout en tournant autour de l'axe Cz avec la vitesse angulaire ω (cf. figure).



1- a : Exprimer le vecteur vitesse angulaire (appelé aussi vecteur rotation instantanée) du disque, $\boldsymbol{\Omega}_{D/R}$.

b : Ecrire la relation donnant le champ des vitesses d'un solide.

c : En déduire la relation entre les vitesses $\mathbf{v}_{C/R}$ et $\mathbf{v}_{J/R}$ (J, point matériel appartenant au disque coïncidant avec le point géométrique de contact au temps t).

d : En déduire la relation entre dx/dt et $d\varphi/dt$ pour qu'il y ait roulement sans glissement.

2- Etablir $\underline{I}_C$ la matrice d'inertie en C dans la base $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$.

On expliquera pourquoi les produits d'inertie sont nuls et l'on admettra la relation suivante entre les moments d'inertie : $I_x + I_y = I_z$.

3- On pourra traiter cette question sans préciser les expressions de I_x , I_y et I_z .

a : Définir R^* , le référentiel du centre de masse.

b : Déterminer $\mathbf{L}^*$ moment cinétique du disque en C.

c : En déduire E_k^* énergie cinétique du disque dans le référentiel R^*

d : Enoncer le théorème de Koenig relatif à l'énergie cinétique. Déterminer E_k , énergie cinétique du disque dans le référentiel R .