

- L'appliquer ici au cas de satellites en orbite autour de la Terre.
- Cette loi est indépendante de la masse m du satellite. Elle dépend de a , rayon de la trajectoire circulaire ou demi-grand axe de la trajectoire elliptique.
 - Elle dépend aussi de M_T , masse de la Terre associée au centre de force O . La Terre est ici supposée à symétrie sphérique : cela signifie que la répartition de sa masse ne dépend que de r . Dans ce cas, la Terre se comporte comme un point matériel situé en O auquel on associe la masse totale M_T .

Solution DL n°10

1) • Système étudié : $\{M, m\}$, satellite de la Terre étudié le référentiel géocentrique supposé galiléen $\mathcal{R}_G$.

- Bilan des forces : la seule force appliquée à M est la force gravitationnelle :

$$\vec{F}_{ext} = \vec{F} = -G \frac{M_T m}{r^2} \vec{e}_r = -G \frac{M_T m}{r^3} \vec{OM}$$

- Cette force est **conservative**, dérivant de l'énergie potentielle gravitationnelle :

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,grav} = -\mathcal{G} \frac{M_T m}{r}} \quad (\text{en choisissant l'origine de l'énergie potentielle pour } r \rightarrow \infty).$$

• Cette force est également **centrale**, donc $\mathcal{M}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \times \vec{F} = \vec{0}$.

$\hookrightarrow$ le théorème du moment cinétique appliqué en O dans $\mathcal{R}_G$ conduit donc à :

$$\left(\frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}_G}(M)}{dt} \right)_{\mathcal{R}_G} = \mathcal{M}_O(\vec{F}) = \vec{0} \Leftrightarrow \boxed{\vec{L}_{O/\mathcal{R}_G}(M) = \text{Cste}}$$

• Comme $\forall t \quad \vec{L}_{O/\mathcal{R}_G}(M) \perp \mathcal{T} = (\overrightarrow{OM}, \vec{v}_{M/\mathcal{R}_G})$, on en déduit que la trajectoire (constituée par l'ensemble des points M contenus dans les plans $\mathcal{T}$) est tout le temps orthogonale à une direction constante qui celle de $\vec{L}_{O/\mathcal{R}_G}$ – qu'on peut librement choisir selon $\vec{e}_z$.

Dès lors, la trajectoire de M est contenue dans le plan (Oxy) .

2) • Pour le point matériel M en mouvement circulaire dans le référentiel géocentrique, le Principe Fondamental de la **Dynamique** s'écrit :

$$m \vec{a}_{M/\mathcal{R}_G} = \vec{F} \Leftrightarrow m(-r\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + r\ddot{\theta} \vec{e}_\theta) = -\mathcal{G} \frac{M_T m}{r^2} \vec{e}_r, \text{ soit :}$$

$$\begin{cases} -m \frac{v^2}{r} = -\mathcal{G} \frac{M_T m}{r^2} & \textcircled{1} \\ m \frac{dv}{dt} = 0 & \textcircled{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \textcircled{2} \rightarrow \boxed{v = v_0 = ctse} \\ \textcircled{1} \rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G} M_T}{r}}} \end{cases} \text{ Mouvement circulaire } \mathbf{uniforme}$$

• À la surface de la Terre, si l'on assimile le champ de pesanteur au champ gravitationnel : $mg_0 \approx \mathcal{G} \frac{M_T m}{R_T^2}$, d'où : $\boxed{\mathcal{G} M_T \approx g_0 R_T^2}$.

$$\text{Alors : } \boxed{v_0 = R_T \sqrt{\frac{g_0}{R_T}} = R_T \sqrt{\frac{g_0}{R_T + h}} = 7,44 \text{ km.s}^{-1}}$$

3) • Le satellite n'étant soumis qu'à une force conservative, le **Théorème de l'énergie mécanique** s'écrit :

$$d\mathcal{E}_m = \delta W_{NC} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{E}_m = \text{Cste}$$

Or :

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{2} m v^2 = \text{cste} = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} \mathcal{G} \frac{M_T m}{r} \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_k = \text{cste} = -\frac{1}{2} \mathcal{E}_{p,grav}}$$

D'où :

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_{p,grav} = -\mathcal{E}_k = -\frac{1}{2} \mathcal{G} \frac{M_T m}{r}}$$

• Lorsque des forces de frottements (forces non conservatives qui s'opposent au mouvement) apparaissent, le **Théorème de la puissance mécanique** s'écrit :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \mathcal{P}_{NC/\mathcal{R}_G} = \vec{f} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}_G} < 0$$

Alors, l'énergie mécanique diminue au cours du temps : le rayon de la trajectoire sera de plus en plus faible ($r \searrow$) et le mouvement tourbillonnaire autour du centre de force se fera avec une vitesse... de plus en plus grande ($v \nearrow$) !

4) • Lorsque le satellite est posé sur la Terre en un point de latitude λ , son énergie mécanique dans le référentiel géocentrique se compose :

◦ de l'énergie cinétique d'un point matériel M en rotation de rayon $\rho = R_T \cos \lambda$ autour de l'axe des pôles à la vitesse angulaire Ω : $\mathcal{E}_k = \frac{1}{2} m v_{M/\mathcal{R}_G}^2 = \frac{1}{2} m (\rho \Omega)^2$, soit :

$$\boxed{\mathcal{E}_k = \frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T} R_T \cos \lambda \right)^2}$$

◦ de l'énergie potentielle gravitationnelle qui est inversement proportionnelle à la distance du satellite au centre de force ($r = OM = R_T$ dans ce cas) :

$$\mathcal{E}_{p,grav} = -\mathcal{G} \frac{M_T m}{R_T}$$

→ D'où :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T} R_T \cos \lambda \right)^2 - \mathcal{G} \frac{M_T m}{R_T}$$

• On constate que cette énergie mécanique est maximale lorsque $\lambda = 0$, c'est-à-dire sur l'Équateur. Puisque le terme d'énergie potentielle est indépendant de la latitude (on suppose la Terre parfaitement sphérique), cela veut dire qu'à l'énergie mécanique maximale correspond une énergie cinétique maximale dans le référentiel géocentrique **due à la rotation de la Terre** :

$$\mathcal{E}_{k,max}^{rotation} = \frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T} R_T \right)^2$$

Or, pour lancer le satellite, il faut lui fournir un supplément d'énergie cinétique dans le référentiel géocentrique. Ce supplément sera d'autant plus faible que l'énergie cinétique du satellite est déjà importante – ce qui est le cas lorsqu'on est à l'Équateur.

Mais pour bénéficier de cette énergie cinétique maximale à l'Équateur dû à la rotation de la Terre, il faut bien entendu envoyer le satellite dans le sens de rotation de la Terre, c'est-à-dire vers l'Est.

$$\bullet \quad v_{sol}(\lambda = 0) = \frac{2\pi}{T} R_T = 0,46 \text{ km.s}^{-1}.$$

5) Le plan de la trajectoire circulaire du satellite M doit contenir le centre de force O (cf. 1). Pour qu'un satellite géostationnaire soit toujours au-dessus d'un même point de la surface terrestre, il est impératif que le plan de sa trajectoire circulaire soit orthogonale à l'axe des pôles.

CI : tous les satellites géostationnaires sont contenus dans le plan de l'Équateur.

6) • Un satellite géostationnaire doit tourner dans le plan de l'équateur (cf. 5) sur un cercle de rayon r_G avec la même vitesse angulaire Ω que la Terre (de manière à être en permanence au-dessus du même point de la surface de la Terre) : $v_G = r_G \Omega = r_G \frac{2\pi}{T}$.

• Comme, par ailleurs, cette vitesse s'écrit également (cf. 2) : $v_G = \sqrt{\frac{\mathcal{G} M_T}{r_G}}$, on en déduit la **troisième loi de Képler** :

$$v_G = \sqrt{\frac{\mathcal{G} M_T}{r_G}} = r_G \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow \frac{T^2}{r_G^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G} M_T}$$

• Sachant que $r_G = R_T + h_G$, on en déduit l'altitude d'un satellite géostationnaire :

$$r_G = \left(\frac{T^2 \mathcal{G} M_T}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 42\,170 \text{ km} \Leftrightarrow h_G = r_G - R_T = 35\,800 \text{ km}$$

• La vitesse de rotation du satellite géostationnaire est :

$$v_G = r_G \Omega = (R_T + h_G) \frac{2\pi}{T} = 3,07 \text{ km.s}^{-1}$$

ces résultats sont indépendants de la masse du satellite géostationnaire considéré. On retiendra que l'altitude de l'orbite géostationnaire est $\sim 36\,000 \text{ km}$.

• L'énergie mécanique du satellite TELECOM dans le référentiel géocentrique est :

$$\mathcal{E}_{mG} = \underbrace{\frac{1}{2} m v_G^2}_{4,7 \cdot 10^9 \text{ J}} - \underbrace{\mathcal{G} \frac{M_T m}{r_G}}_{9,4 \cdot 10^9 \text{ J}} = -4,7 \cdot 10^9 \text{ J}$$

7) Ces grandeurs sont à comparer avec les termes d'énergie cinétique de rotation et d'énergie potentielle gravitationnelle du satellite immobile à la surface de la Terre :

$$\mathcal{E}_{m0} = \underbrace{\frac{1}{2}m \left(\frac{2\pi}{T} R_T \right)^2}_{0,1.10^9 \text{ J}} - \underbrace{\mathcal{G} \frac{M_T m}{R_T}}_{62,6.10^9 \text{ J}} = -62,5.10^9 \text{ J}$$