

DL n°10 – Satellite géostationnaire

Le mouvement des satellites artificiels de la Terre est étudié dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_G$ supposé galiléen. Ce référentiel a pour origine le centre O et ses axes sont orientés dans la direction de trois étoiles éloignées fixes. Dans le référentiel géocentrique, la Terre tourne autour de son axe avec une période de révolution T et une vitesse angulaire Ω .

On désignera par M_T et R_T respectivement la masse et le rayon de la Terre. $\mathcal{G}$ est la constante de gravitation universelle.

Données : $T = 86\,164\text{ s}$; $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}\text{ kg}$; $R_T = 6\,370\text{ km}$; $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11}\text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$.

Un satellite artificiel M de masse m est en orbite circulaire de rayon r autour de la Terre. Les frottements dus à l'atmosphère sur le satellite sont négligés.

1) Montrer qu'un satellite artificiel en orbite circulaire autour de la Terre a nécessairement une trajectoire plane contenant le centre O de la Terre.

Méthode : Étude systématique d'un problème de mécanique : cas de mouvement à *force centrale*.

- Définir le système étudié.
- Choisir le référentiel d'étude.
- Bilan des forces appliquées au système.

→ Le système est-il **conservatif** ?

Dit autrement, les forces appliquées au système dérivent-elles d'énergies potentielles ? Lesquelles ?

→ Le mouvement est-il à *force centrale conservative* ?

Auquel cas, l'étude d'un tel mouvement est systématique :

- Établir la **conservation du moment cinétique** : montrer que le mouvement a lieu dans un **plan fixé** par les conditions initiales sur la position et la vitesse du système, et obéit à la **loi des aires**.
- Établir la **conservation de l'énergie mécanique**.

2) Démontrer que le mouvement du satellite autour de la Terre est uniforme et exprimer littéralement sa vitesse v_0 . On exprimera d'abord v_0 en fonction de $\mathcal{G}$, M_T et r , puis en fonction de g_0 , R_T et r , où g_0 désigne l'intensité du champ de pesanteur à la surface de la Terre.

Le satellite **SPOT** (Satellite SPécialisé dans l'Observation de la Terre) est en orbite circulaire à l'altitude $h = 832\text{ km}$ au-dessus de la Terre. Calculer numériquement la vitesse v_0 de **SPOT** sur son orbite.

Méthode : • Préciser le nombre de degrés de liberté du problème

• Détermination des équations du mouvement (par projection du PFD dans une base adaptée)

→ Le théorème du moment cinétique ayant été utilisé en 1), on peut utiliser le caractère vectoriel du Principe Fondamental de la Dynamique.

→ Les coordonnées polaires dans le plan de la trajectoire sont adaptées au mouvement à force centrale. L'origine O est au centre de force.

Rappels : ◦ Grandeurs cinématiques dans le cas général en base polaire dans un référentiel $\mathcal{R}$:

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r \quad \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$

◦ Pour une trajectoire circulaire, les expressions précédente se simplifient en posant $r = Cste$:

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r \quad \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$$

◦ Puisque le problème s'intéresse à la vitesse $v = r\dot{\theta}$ du satellite, il est plus judicieux d'écrire :

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r \quad \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = v\vec{e}_\theta \quad \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = -\frac{v^2}{r}\vec{e}_r + \frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta$$

3) L'origine de l'énergie potentielle gravitationnelle est choisie nulle à l'infini. Exprimer l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ du satellite autour de la Terre en fonction de $\mathcal{G}$, M_T , r et m . Quel est l'effet des forces de frottements de l'atmosphère sur le rayon de la trajectoire et sur la vitesse du satellite ?

Méthode : Établir (ou revenir sur) la **conservation de l'énergie mécanique** en appliquant le **Théorème de l'énergie mécanique**.

4) Exprimer l'énergie mécanique $\mathcal{E}$ du satellite immobile à la surface de la Terre en un point de latitude λ en fonction de $\mathcal{G}$, M_T , m , R_T , λ et de la période T de rotation de la Terre autour de l'axe Sud-Nord.

Pourquoi lance-t-on préférentiellement les satellites depuis les régions de basse latitude (Kourou en Guyane française : latitude 5° Nord; Cap Canaveral en Floride : latitude 28° Nord). Les lance-t-on plutôt vers l'Est ou vers l'Ouest ?

Méthode : Le satellite est immobile sur la surface de la Terre **mais** en rotation dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_G$.

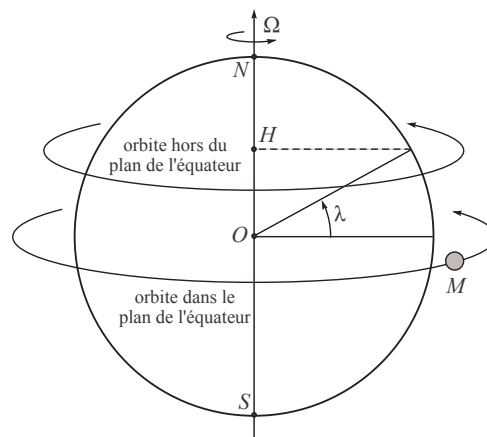
Attention : Ce référentiel ne tourne pas avec la Terre dans le référentiel de **Copernic**, car ses axes sont orientés vers des étoiles éloignées fixes. C'est la Terre qui tourne autour de l'axe des pôles (SN) dans $\mathcal{R}_G$.

La vitesse du **satellite fixe au sol** M est donc la vitesse d'un point de la surface de la Terre confondu avec lui (un point coïncident) en rotation autour de l'axe (SN).

$\hookrightarrow$ La trajectoire du satellite est donc circulaire de rayon $R = HM$ qui s'exprime en fonction de R_T et de λ , dans le plan passant par H parallèle au plan de l'Équateur.

$\hookrightarrow$ Il faut donc écrire la vitesse de M en coordonnées polaires (cf. Rappels en 3), avec origine en H , en faisant apparaître $\Omega = \dot{\theta}$ qui est la vitesse angulaire de la Terre autour de son axe.

o La vitesse angulaire est associée à la période de révolution par quelle relation ?



Un satellite artificiel de la Terre est **géostationnaire** s'il est immobile dans le référentiel terrestre : son orbite est circulaire, il survole constamment le même point de la surface de la Terre.

Le satellite TELECOM de masse $m_s = 1\text{ t}$ est en orbite circulaire dans le plan de l'équateur. Il est géostationnaire.

5) Peut-on placer un satellite géostationnaire en orbite en dehors du plan de l'équateur ?

6) Calculer l'altitude h_G (ou distance au sol), la vitesse v_G et l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{mG}$ du satellite TELECOM sur son orbite géostationnaire. Tous les satellites géostationnaires doivent-ils avoir la même masse ?

Méthode : Utiliser la **Troisième loi de Kepler** : loi propre aux trajectoires circulaires ou elliptiques d'astres tournant autour du même centre de force et dont l'interaction mutuelle est négligée.

$\rightarrow$ L'appliquer ici au cas de satellites en orbite autour de la Terre.

o Cette loi est indépendante de la masse m du satellite. Elle dépend de a , rayon de la trajectoire circulaire ou demi-grand axe de la trajectoire elliptique.

o Elle dépend aussi de M_T , masse de la Terre associée au centre de force O . La Terre est ici supposée à symétrie sphérique : cela signifie que la répartition de sa masse ne dépend que de r . Dans ce cas, la Terre se comporte comme un point matériel situé en O auquel on associe la masse totale M_T .

7) Comparer les termes $\mathcal{E}_{mG}$, $\mathcal{E}_{kG}$ et $\mathcal{E}_{pG}$ d'un satellite géostationnaire avec les termes correspondants $\mathcal{E}_{m0}$, $\mathcal{E}_{k0}$ et $\mathcal{E}_{p0}$ du satellite immobile à la surface de la Terre dans le plan de l'équateur.