
Solution Ex-M7.13

1) La force est centrale de centre de force O . Le **T.M.C.** pour M évalué en O dans le référentiel $\mathcal{R}$ s'écrit : $\left(\frac{d\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M)}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \mathcal{M}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \times \vec{F} = \vec{0}$, soit $\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) = \overrightarrow{Ct\acute{e}}$, d'expression :

$$\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) = \begin{cases} \overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M_0) &= r_0 \vec{e}_x \times m v_0 (\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y) &= m r_0 v_0 \sin \alpha \vec{e}_z \\ \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} &= r \vec{e}_r \times (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) &= m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = m C \vec{e}_z \end{cases}$$

avec $C = r^2 \dot{\theta} = r_0 v_0 \sin \alpha$, la **constante des aires**.

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ est orthogonal à tout instant à $\overrightarrow{LO}$, donc à $\overrightarrow{e_z}$, direction fixe de l'espace : **la trajectoire est donc plane**, contenue dans le plan $(Oxy) \perp \overrightarrow{e_z}$.

2) Lors d'un déplacement élémentaire de M , le travail de la force $\vec{F}$ est : $\delta W = -\frac{a}{r^3} \text{ver.} \cdot (d\vec{e}_r + r d\vec{e}_\theta) = -\frac{a}{r^3} dr = -d\mathcal{E}_p$, avec $\mathcal{E}_p = -\frac{a}{2r^2}$ (en choisissant l'énergie potentielle nulle à l'infini).

Thm $\mathcal{E}_m$: $d\mathcal{E}_m = \delta W_{NC} = 0$, soit $\mathcal{E}_m = \text{Cte}$: **le système est conservatif**.

Le système $\{M, m\}$ a pour énergie mécanique :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}mv_{M/\mathcal{R}}^2 + \mathcal{E}_p(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \mathcal{E}_p(r) = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{r}^2}_{\mathcal{E}_{k,r}} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{mC^2}{r^2} + \mathcal{E}_p(r)}_{\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)}$$

D'où $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}\frac{mC^2}{r^2} + \mathcal{E}_p(r) = \frac{mr_0^2v_0^2\sin^2\alpha - a}{2r^2}$

3) L'énergie potentielle s'annule à l'infini. Le système est donc dans un **état de diffusion** si son énergie mécanique est positive, ce qui se traduit par :

$$\mathcal{E}_m = \text{Cte} = \mathcal{E}_m(0) = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{a}{2r_0^2} > 0 \Leftrightarrow v_0 > \sqrt{\frac{a}{mr_0^2}}$$

4.a) Comme la constante des aires s'écrit : $C = \frac{L_O}{m} = r^2\dot{\theta} = r_0v_0\sin\alpha = r_0v_0$ pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$,

on a : $\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{r_0v_0}{r^2} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)$

Comme $u'_\theta = \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$, on a : $\frac{dr}{d\theta} = -r^2u'_\theta$ } Soit : $\dot{r} = -r_0v_0u'_\theta$

Alors $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{k,r} + \mathcal{E}_{p,\text{eff}} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mr_0^2v_0^2 - a}{2r^2} = \frac{1}{2}mr_0^2v_0^2(u'_\theta)^2 + \frac{mr_0^2v_0^2 - a}{2}u^2$

4.b) Puisque $\mathcal{E}_m = \text{Cte}$ $\xrightarrow[\text{par rapport à } \theta]{\text{en dérivant}}$ $0 = mr_0^2v_0^2u''_\theta \cdot u'_\theta + (mr_0^2v_0^2 - a)u \cdot u'_\theta$

Comme le cas $u'_\theta = 0$ ne nous intéresse pas (on étudie le mouvement de M), on obtient :

$$u''_\theta + \left(1 - \frac{a}{mr_0^2v_0^2}\right)u = 0 \Leftrightarrow u''_\theta + \eta^2u = 0 \quad \text{avec } \eta = \sqrt{1 - \frac{a}{mr_0^2v_0^2}}$$

Rq : η est bien défini puisque $1 - \frac{a}{mr_0^2v_0^2} > 0$ d'après la condition sur la vitesse établie en 3).

4.c) La solution générale de l'équation est : $u(\theta) = A \cos(\eta\theta) + B \sin(\eta\theta)$

À $t = 0$, $\theta_0 = 0$ (puisque $\overrightarrow{OM}_0 = \vec{0}$), donc $\vec{e}_r(0) = \vec{e}_x$, $\vec{e}_\theta(0) = \vec{e}_y$

Soit $\vec{v}_0 = \begin{cases} v_0 \vec{e}_y \\ \dot{r}(0)\vec{e}_r + r_0\dot{\theta}(0)\vec{e}_\theta = \dot{r}(0)\vec{e}_x + r_0\dot{\theta}(0)\vec{e}_y \end{cases}$

Donc : $\dot{r}(0) = 0 = -r_0v_0u'(\theta_0)$ (d'après 4.a)).

D'où $\begin{cases} u(0) = \frac{1}{r_0} = A \\ u'_\theta(0) = 0 = -B\eta \end{cases}$

Cl : $u(\theta) = \frac{1}{r_0} \cos(\eta\theta) \Leftrightarrow r = \frac{r_0}{\cos\left(\theta\sqrt{1 - \frac{a}{mr_0^2v_0^2}}\right)}$

4.d)

