

Ex-M7.13) Force centrale en $1/r^3$ (, à chercher après avoir travaillé le reste)**

Un point matériel M de masse m est soumis, dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, à une force d'expression $\vec{F} = -\frac{a}{r^3} \vec{e}_r$ en coordonnées sphériques de centre O , a étant une constante positive. À l'instant initial, M est à la position M_0 telle que $\overrightarrow{OM_0} = r_0 \vec{e}_x$, avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0(\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y)$.

- 1) Montrer que le mouvement est plan et déterminer le plan de la trajectoire.
- 2) Montrer que la force $\vec{F}$ est une force conservative. En déduire l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(r)$ dont elle dérive (on prendre $\mathcal{E}_p(\infty) = 0$). Déterminer l'expression de l'énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ compte tenu des conditions initiales.
- 3) r_0 étant donné, indiquer la condition sur v_0 pour que le système soit dans un état de diffusion.
- 4) La particule est dans un état de diffusion et $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

a) Établir que $\dot{r} = \frac{r_0 v_0}{r^2} \frac{dr}{d\theta}$. En déduire que $\dot{r} = -r_0 v_0 u'_\theta$ avec $u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$ et $u'_\theta = \frac{du}{d\theta}$.

b) Exprimer la conservation de l'énergie mécanique en fonction de la variable u et de u'_θ .

En déduire que u vérifie l'équation : $u''_\theta + \eta^2 u = 0$ avec $\eta = \sqrt{1 - \frac{a}{mr_0^2 v_0^2}}$.

c) Déterminer l'équation polaire de la trajectoire compte tenu des conditions initiales.

d) Donner l'allure de la trajectoire pour $\eta = 0, 1$, $\theta_0 = 0$ et $r_0 = 1 \text{ m}$.