

Réponses

Mouvement dans un champ newtonien

1) Le référentiel géocentrique

- a pour origine le centre d'inertie de la terre
- a pour axes des axes parallèles à ceux du référentiel de Copernic (directions de trois étoiles éloignées pouvant être considérées comme fixes)

2)

$$\vec{F} = - \frac{GM_T m}{r_{OP}^2} \vec{u}_{OP}$$

$$\vec{F} = - \frac{GM_T m}{r^3} \vec{r}$$

3) La force est conservative.

Par exemple, on peut dire que le travail élémentaire de cette force est une différentielle totale :

$$\begin{aligned} \delta W &= \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad \text{avec } d\vec{l} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{u}_\varphi \\ &= - \frac{GM_T m}{r^2} dr \end{aligned}$$

$$\boxed{\delta W = - dE_p}$$

puisque il ne fait intervenir que la variable r . (Il existe donc une primitive).

La force est centrale.

Elle est selon $\vec{u}_{OP}$ donc elle passe par le point O fixe.

Son moment en O est donc nul :

$$\vec{M}_{(O)} = \vec{OP} \wedge \vec{F}$$

$$\boxed{\vec{M}_{(O)} = \vec{0}}$$

- Il y a donc conservation de l'énergie mécanique totale: E

cf : théorème de l'énergie cinétique

$$dE_c = \delta W$$

$$= -dE_p$$

$$d(\underbrace{E_c + E_p}_E) = 0$$

$$\boxed{E = \text{constante}}$$

- Il y a donc conservation du moment cinétique en O : $\vec{\sigma}(O)$

cf: théorème du moment cinétique en un point fixe

$$\frac{d\vec{\sigma}(O)}{dt} = \vec{m}_j(O)$$

$$= \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{\sigma}(O) = \text{constante}}$$

4) par exemple:

$$\vec{F} = -\text{grad } E_p(r, \theta, \varphi)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{GM_T m}{r^2} \right) = -\frac{\partial E_p}{\partial r}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (0) = -\frac{\partial E_p}{\partial \theta}$$

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (0) = -\frac{\partial E_p}{\partial \varphi}$$

d'où

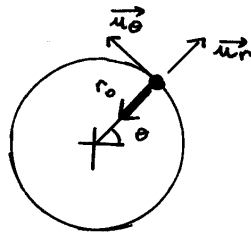
$$E_p = E_p(r)$$

$$\frac{dE_p}{dr} = \frac{GM_T m}{r^2}$$

$$E_p = -\frac{GM_T m}{r} + \text{cste}$$

$$\boxed{E_p = -\frac{GM_T m}{r}}$$

5)



on applique le principe fondamental

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

$$-\frac{GM_T m \vec{u}_r}{r_0^2} = m \vec{a}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{GM_T m}{r^2} \right) = -\frac{m v^2}{r_0}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (0) = m \frac{dv}{dt}$$

d'où

$$\boxed{v^2 = \frac{GM_T}{r_0}}$$

e) période

$$T_0 = \frac{2\pi r_0}{v}$$

$$T_0^2 = \frac{4\pi^2 r_0^2}{v^2}$$

$$= \frac{4\pi^2 r_0^2}{GM_T/r_0}$$

$$T_0^2 = \frac{4\pi^2 r_0^3}{GM_T}$$

énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} \frac{GM_T m}{r_0}$$

f)

$$E_p = - \frac{GM_T m}{r_0}$$

donc

$$E_c = - \frac{1}{2} E_p$$

D'après le théorème du viriel, E_p étant en $\frac{1}{r}$, on a

$$E_p(\lambda r) = \frac{1}{\underbrace{\lambda}_{\lambda^k}} E_p(r)$$

soit

$$k = -1$$

$$k \langle E_p \rangle = 2 \langle E_c \rangle$$

ici :

$$-1 \langle E_p \rangle = 2 \langle E_c \rangle$$

c'est bien le résultat obtenu plus haut.

g) Cas d'une ellipse (trajectoire bornée, périodique)

$$E = E_c + E_p$$

$$= \langle E_c \rangle + \langle E_p \rangle$$

$$= \langle E_c \rangle - 2 \langle E_c \rangle$$

$$E = - \langle E_c \rangle = \frac{\langle E_p \rangle}{2}$$

on trouve donc

$$E < 0$$

caractéristique pour un état lié

9) Les conditions initiales permettent de déterminer les constantes E et $\vec{\sigma}(0)$

$$\begin{aligned} \rightarrow E &= \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GM_T m}{r_0} \\ &= \frac{1}{2} m \alpha^2 \frac{GM_T}{r_0} - \frac{GM_T m}{r_0} \\ E &= -\frac{GM_T m}{r_0} \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \vec{\sigma} &= \vec{r}_0 \wedge m \vec{v}_0 \\ \begin{array}{c|c} \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z & \begin{array}{c} r_0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ m\alpha\sqrt{\frac{GM_T}{r_0}} \\ 0 \end{array} \end{array} \end{aligned}$$

$$\vec{\sigma} = m\alpha \sqrt{GM_T r_0} \vec{u}_\theta$$

10) Le mouvement est à force centrale donc $\vec{\sigma}(0) = \text{constante}$ avec

$$\vec{\sigma} = \vec{OP} \wedge m\vec{v} \text{ selon } \vec{u}_z$$

$$\vec{OP} \perp \vec{\sigma} \text{ donc}$$

P appartient au plan perpendiculaire à $\vec{u}_z$ passant par O .

11)

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= \vec{r} \wedge m\vec{v} \\ \begin{array}{c|c} \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z & \begin{array}{c} r \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \dot{r} \\ m r \dot{\theta} \\ 0 \end{array} \end{array} \end{aligned}$$

$$\vec{\sigma} = m r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z = \text{cste}$$

Donc

$$\begin{aligned} r^2 \dot{\theta} &= C \\ &= \alpha \sqrt{GM_T r_0} \end{aligned}$$

12) On a établi que

$$E = - \frac{GM_T m}{r_0} \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)$$

négligé si

$$1 - \frac{\alpha^2}{2} > 0$$

$$\boxed{\sqrt{2} > \alpha}$$

ce qui est le cas.

Dans ce cas, il s'agit d'un état lié (la trajectoire est bornée, r ne peut tendre vers l'infini) (cf question 8)

13)

$$u = \frac{1}{r(\theta)}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

$$= -\frac{u'}{u^2} \dot{\theta} \quad \text{avec} \quad \dot{\theta} = C u^2$$

$$= -C u'$$

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$= -C u' \vec{u}_r + \frac{1}{u} C u^2 \vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\vec{v} = C (-u' \vec{u}_r + u \vec{u}_\theta)}$$

14)

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GM_T m}{r}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m C^2 (u'^2 + u^2) - GM_T m u}$$

15) On dérive par rapport à θ

$$0 = \frac{1}{2} m C^2 (2 u' u'' + u u') - GM_T m u'$$

la solution $u' = 0$ est à rejeter donc:

$$u'' + u = \frac{GM_T}{C^2}$$

$$\boxed{u'' + u = \frac{1}{p}}$$

$$u = A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{1}{P}$$

(deux constantes arbitraires A et θ_0)

on pose : $A = \frac{e}{P}$

(les deux constantes deviennent e et θ_0)

$$u(\theta) = \frac{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}{P}$$

15)

$$P = \frac{C^2}{G M_T}$$

$$= \frac{\alpha^2 G M_T r_0}{G M_T}$$

$$P = \alpha^2 r_0$$

17) Conditions initiales :

$$\theta=0 \quad u = \frac{1}{r_0} \quad \text{donc : } \frac{1}{r_0} = \frac{1 + e \cos \theta_0}{\alpha^2 r_0}$$

$$\theta=0 \quad \vec{v} \text{ selon } \vec{u}$$

donc

$$u' = 0 \quad \text{soit : } 0 = \frac{e \sin \theta_0}{\alpha^2 r_0}$$

donc $\theta_0 = 0$ (on veut e positif)

$$e = \alpha^2 - 1$$

18) finalement

$$r = \frac{P}{1 + e \cos \theta}$$

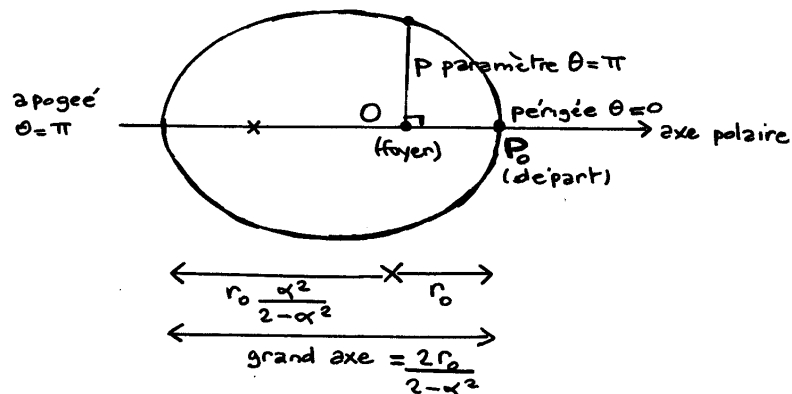
→ le rayon est minimum pour $\theta = 0$
(périgée)

→ le rayon est maximum pour $\theta = \pi$
(apogée)

$$r_{\text{MIN}} = \frac{P}{1 + e} = r_0$$

$$r_{\text{MAX}} = \frac{P}{1 - e} = \frac{\alpha^2}{2 - \alpha^2} r_0$$

19)



20)

$$E_c = \frac{1}{2} m C^2 (u^2 + u'^2)$$

$$= \frac{1}{2} m P G M_T \left(\frac{(1+e \cos \theta)^2}{p^2} + \frac{(-e \sin \theta)^2}{p^2} \right)$$

$$E_{c(\theta)} = \frac{1}{2} \frac{G M_T m}{P} (1 + 2e \cos \theta + e^2)$$

21)

$$E_p = - G M_T m u$$

$$E_{p(\theta)} = - \frac{G M_T m}{P} (1 + e \cos \theta)$$

22)

$$\rightarrow E_{c(\theta)} + E_{p(\theta)} = - \frac{G M_T m}{2P} (1 - e^2)$$

$$\rightarrow = - \frac{G M_T m (2 - \alpha^2) \alpha^2}{2 \alpha^2 r_0}$$

on retrouve effectivement l'expression de E déjà établie

$$E = - \frac{G M_T m (1 - \frac{\alpha^2}{2})}{r_0}$$

$\rightarrow$ qu'on peut écrire ($2a$: grand axe)

$$E = - \frac{G M_T m}{2a}$$

(même formule que pour une trajectoire circulaire de rayon a)

23) En vertu du théorème du viriel :

$$2 \langle E_c \rangle = - \langle E_p \rangle$$

$$\frac{GM_T m}{P} (1 + 2e \underbrace{\langle \cos \theta \rangle}_{\substack{\text{moyenne} \\ \text{dans le temps} \\ \text{de } \cos \theta(t)}} + e^2) = \frac{GM_T m}{P} (1 + e \langle \cos \theta \rangle)$$

$$\boxed{\langle \cos \theta \rangle = -e}$$

Donc le satellite reste plus longtemps dans le domaine $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ que dans le domaine $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

(compréhensible : la région $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ correspond aux r "plus grands" ... donc à $\dot{\theta}$ "plus petit" puisque $r^2 \dot{\theta} = C$)

La symétrie de la trajectoire par rapport à l'axe polaire permet de prévoir que

$$\boxed{\langle \sin \theta \rangle = 0}$$

24)

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{P}{C^2} \left(\frac{P}{1-e^2} \right)^3$$

$$\boxed{T = 2\pi \frac{P^2}{C} (1-e^2)^{-3/2}}$$

25)

$$r^2 \dot{\theta} = C$$

$$dt = \frac{r^2 d\theta}{C}$$

$$= \frac{P^2}{C} \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

$$\frac{dt}{T} = \frac{1}{2\pi} (1-e^2)^{3/2} \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

$$\boxed{\frac{\Delta t}{T} = \frac{(1-e^2)^{3/2}}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}}$$

25) A.N.
 $e = 0,5$
 $\theta_1 = -\pi/2$
 $\theta_2 = \pi/2$

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{(1-0,5^2)^{3/2}}{2\pi} \quad 0,195$$

$$\boxed{\frac{\Delta t}{T} = 0,020}$$

Ici le satellite ne passe que 2% du temps dans le domaine $\cos \theta > 0$ et donc 98% dans le domaine $\cos \theta < 0$. Il est normal de trouver ici

$$\boxed{\langle \cos \theta \rangle < 0}$$

(ici : $\langle \cos \theta \rangle = -0,5$)
