

Mouvement dans un champ newtonien

Le théorème du viriel affirme en particulier que si un point matériel $P(x, y, z)$ possède une énergie potentielle $E_p(x, y, z)$ vérifiant la propriété suivante: pour tout λ réel $E_p(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^k E_p(x, y, z)$, alors il existe la relation suivante entre valeurs moyennes temporelles au cours du mouvement de P : $k \langle E_p \rangle = 2 \langle E_c \rangle$ à condition que la trajectoire soit bornée (E_c désigne l'énergie cinétique de P). Dans la suite, le mouvement est périodique et les moyennes sont calculées sur une période.

On considère un satellite de masse m , assimilé à un point matériel P , se trouvant à une distance r du centre O de la terre. On note G la constante de gravitation, M_T la masse de la terre et $\vec{r} = \vec{OP}$.

I. Généralités

1. L'étude est faite dans le référentiel géocentrique supposé galiléen auquel est associé un repère orthonormé (O, x, y, z) . Définir ce référentiel.
2. Donner l'expression vectorielle de la force subie par le satellite.
3. Cette force est-elle conservative? Justifier. Cette force est-elle centrale? Justifier. Quelles sont alors les deux grandeurs qui sont conservées au cours du mouvement? Justifier rapidement.
4. Retrouver l'expression de l'énergie potentielle E_p du satellite (avec la convention $E_p = 0$ à l'infini).

II. Cas particulier d'une trajectoire circulaire

5. Dans le cas où la trajectoire du satellite est circulaire de rayon r_0 , déterminer sa vitesse v en fonction éventuellement de G , M_T , m , r_0 .
6. En déduire la période T_0 et l'énergie cinétique E_c .
7. Quelle est pour cette trajectoire circulaire la relation entre E_c et E_p . Le résultat est-il en accord avec le théorème du viriel.
8. Comment s'exprime ici le théorème du viriel dans un cas moins particulier que celui du mouvement circulaire? Quelle propriété de l'énergie retrouve-t-on pour un état lié?

III. Équation générale d'une trajectoire elliptique

Le satellite est lancé, en $t=0$, d'un point P_0 tel que $\vec{OP}_0 = r_0 \vec{u}_r$, avec une vitesse orthoradiale (orthogonale au rayon vecteur) $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_\theta = \alpha \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}} \vec{u}_\theta$ avec $1 < \alpha < \sqrt{2}$.

9. Donner l'expression de l'énergie $E_{t=0}$ et du moment cinétique en O $\vec{\sigma}_{t=0}$ à l'instant $t=0$ en fonction des données G , M_T , m , r_0 et α .

10. Montrer, avec précision, que le mouvement est plan.
11. Le satellite est repéré en coordonnées polaires (r, θ) dans son plan ; montrer que la quantité $\left(r^2 \frac{d\theta}{dt}\right)$ est constante. Déterminer la valeur de cette constante que l'on notera C .
12. Que peut-on dire du signe de l'énergie. Montrer que la trajectoire est bornée.
13. On pose $u(\theta) = \frac{1}{r}$ et $u'(\theta) = \frac{d u(\theta)}{d \theta}$. Donner l'expression de la vitesse $\vec{v}$ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ en fonction de $u(\theta)$, $u'(\theta)$, C .
14. Donner l'expression de l'énergie E en fonction éventuellement de $u(\theta)$, $u'(\theta)$, G , M_T , m , C .
15. En déduire que l'équation de la trajectoire peut s'écrire sous la forme: $u(\theta) = \frac{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}{p}$
avec $p = \frac{C^2}{G M_T}$.

IV. Grandeurs caractéristiques de la trajectoire étudiée

16. Déterminer le paramètre p de la trajectoire du satellite en fonction de r_0 et α .
17. On choisit l'axe polaire de telle façon que pour le point de départ P_0 on ait $\theta = 0$. Les deux conditions initiales pour $\theta = 0$ ont été indiquées précédemment: pour la première on a $u_{\theta=0} = \frac{1}{r_0}$ et pour la seconde, on obtient $u'_{\theta=0}$ connaissant $\vec{v}_0$.
- Déterminer θ_0 .
 - Déterminer l'excentricité e (grandeur définie positive) de la trajectoire en fonction de α seulement.
18. Calculer les rayons au périégée et à l'apogée en fonction de p et e puis en fonction de r_0 et α .
19. Représenter la trajectoire en précisant le point de départ, l'axe polaire, les foyers, le paramètre.

V. Utilisation du viriel

20. Exprimer l'énergie cinétique $Ec(\theta)$ du satellite en fonction de G , M_T , p , e et θ .
21. Exprimer de même l'énergie potentielle $Ep(\theta)$ en fonction de G , M_T , p , e et θ .
22. En partant des deux résultats précédents, déterminer $Ec(\theta) + Ep(\theta)$. Vérifier que le résultat est cohérent avec $E_{t=0}$. Vérifier aussi que l'énergie mécanique s'exprime simplement en fonction du grand axe.
23. Déduire du théorème du viriel que $\langle \cos \theta \rangle = -e$. Ce résultat est-il surprenant? Que penser de $\langle \sin \theta \rangle$?

Pour mieux cerner le résultat précédent on cherche à évaluer les durées du parcours du satellite: Δt_1 pour un angle θ passant de $-\pi/2$ à $\pi/2$ et Δt_2 pour un angle θ passant de $\pi/2$ à $3\pi/2$.

24. On rappelle la troisième loi de Kepler $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$; exprimer la période T en fonction de p , C et e .

25. Exprimer la durée Δt que met le satellite pour passer d'un angle polaire θ_1 à θ_2 ; on donnera le résultat en fonction de la période et d'une intégrale sans dimension.

26. Si $e=0,5$ le calcul numérique donne le résultat suivant : $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1+e \cos \theta)^2} = 0,195$. Ce résultat est-il en accord avec celui obtenu concernant $\langle \cos \theta \rangle$?
