

Aurélien 01/02

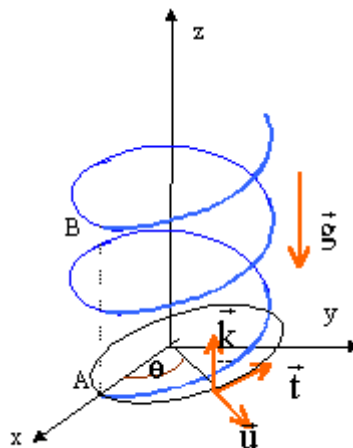
un anneau glisse sur une hélice.



Rechercher

Un anneau de masse m , de dimensions négligeables glisse et se déplace sur une piste hélicoïdale circulaire d'axe Oz et dont les équations paramétriques sont : $x = r \cos \theta$; $y = r \sin \theta$; $z = h\theta$.

Les forces appliquées sont le poids, une force de frottement d'intensité constante f , colinéaire à la vitesse mais de sens contraire et une réaction de la piste normale au déplacement à chaque instant.



Dans un référentiel terrestre galiléen :

1. Exprimer les composantes cartésiennes de la force de frottement en fonction de f , r , θ et α angle entre la vitesse et le plan horizontal. Pour la suite on admettra que cet angle est constant et on exprimera $\tan \alpha$ en fonction de h et r .
2. Calculer le travail de la force de frottement lors du déplacement entre les points B ($\theta = 4\pi$) et A ($\theta = 0$).
3. Exprimer en fonction des données le travail du poids et de la réaction de la piste entre B et A.
4. En déduire la vitesse de l'anneau au point A sachant que sa vitesse initiale était nulle en B. Discuter.

corrigé

Dans le repère local (u, t, k) les composantes de la force de frottement sont :

$$(0 ; f \cos \alpha ; f \sin \alpha)$$

$$\vec{f} = f \cos \alpha \vec{t} + f \sin \alpha \vec{k}$$

$$\text{or } \vec{t} = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y$$

$$\vec{f} = -f \cos \alpha \sin \theta \vec{u}_x + f \cos \alpha \cos \theta \vec{u}_y + f \sin \alpha \vec{k}$$

composante de la vitesse, dérivée du vecteur position par rapport au temps :

$$(-r \sin \theta \theta' ; r \cos \theta \theta' ; h \theta')$$

ou dans le repère local (u, t, k) :

$$(0, r\theta' ; h\theta')$$

$$\tan \alpha = h\theta' / (r\theta') = \underline{h/r}.$$

travail de la force de frottement :

déplacement élémentaire :

$$dx = -r \sin\theta d\theta ; dy = r \cos\theta d\theta ; dz = h d\theta ;$$

$$\text{frottement } (-f \cos\alpha \sin\theta ; f \cos\alpha \cos\theta ; f \sin\alpha)$$

produit scalaire entre les vecteurs frottement et déplacement

$$-f r \cos\alpha \sin^2\theta d\theta + f r \cos\alpha \cos^2\theta + f h \sin\alpha d\theta .$$

Pour obtenir le travail sur le déplacement B vers A, intégrer entre 4π et 0, α et r sont constants

en remarquant que $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos(2\theta))$ et que $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))$

$$\underline{W = -4\pi f [r \cos\alpha + h \sin\alpha]}.$$

travail du poids de B en A :

travail élémentaire au cours du déplacement élémentaire $hd\theta$:

$$dW = mghd\theta$$

Pour obtenir le travail sur le déplacement B vers A, intégrer entre 4π et 0:

$$\underline{W = 4\pi mgh} .$$

le travail de la réaction normale est nul (force perpendiculaire au déplacement)

vitesse en A :

écrire le théorème de l'énergie cinétique entre B et A : (en B la vitesse est nulle)

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = 4\pi mgh - 4\pi f [r \cos\alpha + h \sin\alpha].$$

$$v_A^2 = 8\pi [gh - f/m[r \cos\alpha + h \sin\alpha]].$$

cela est possible à condition que les frottements ne soient pas trop importants :

$$mgh > 4\pi f [r \cos\alpha + h \sin\alpha].$$

[retour](#) - [menu](#)