

Solution Ex-M1.17

1) Condition de roulement sans glissement : $C_0C = \widehat{OI} \iff vt = R\theta \iff v = R\dot{\theta} \equiv R\omega$.

$$2) \quad \overrightarrow{OC} \begin{cases} x_C = R\theta = R\omega t \\ z_C = R \end{cases} \quad 3) \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} \begin{cases} x_C = R(\theta + \sin \theta) = R(\omega t + \sin \omega t) \\ z_C = R(1 + \cos \theta) = R(1 + \cos \omega t) \end{cases}$$

4) $z(\theta)$ est une fonction périodique paire de période 2π et $x(\theta+2\pi) = x(\theta) + 2\pi R$: il suffit donc d'étudier x et z sur $\theta \in [0, 2\pi]$. Le reste de la courbe se déduisant par translation de $2\pi R$ selon (Ox) et par symétrie par rapport à Oz si on veut tracer $M(x(\theta), z(\theta))$ sur $\theta \in [-4\pi, 4\pi]$.

On étudie d'abord

$$\begin{cases} x'(\theta) = R(1 + \cos \theta) \\ z'(\theta) = -R \sin \theta \end{cases}$$

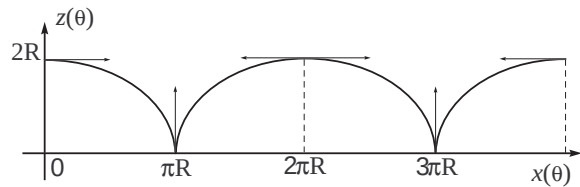
θ	0				$\pi/2$				π	$3\pi/2$				2π			
$x'(\theta)$	2R				$\oplus$ R $\oplus$				0	$\oplus$ R $\oplus$							
$x(\theta)$					$R(1+\pi/2)$				πR	$R(3\pi/2-1)$				$2\pi R$			
$z'(\theta)$	0				$\ominus$ -R $\ominus$				0	$\oplus$ R $\oplus$ 0							
$z(\theta)$	2R				R				0	R				2R			

On pose $\epsilon = \theta - \pi$ pour étudier la tangente à la courbe au point de paramètre $\theta = \pi$.

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe est : $p = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{z'(\theta)}{x'(\theta)}$

$$p = \frac{-R \sin(\pi + \epsilon)}{R(1 + \cos(\pi + \epsilon))} = \frac{\sin \epsilon}{1 - \cos \epsilon}$$

→ Donc $p(\theta = \pi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sin \epsilon}{1 - \cos \epsilon} \simeq \frac{\epsilon}{\epsilon^2/2} = \frac{2}{\epsilon} \rightarrow \infty$: la tangente en $\theta = \pi$ [2 π] est verticale : on dit que la courbe présente un point de rebroussement en $\theta = \pi$.



$$5) \vec{v}_{M/R} = \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R\omega(1 + \cos \omega t) \\ -R\omega \sin \omega t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R\omega(1 + \cos \theta) \\ -R\omega \sin \theta \end{vmatrix}$$

CI : L'hodographe du mouvement est donc un cercle de centre $(R\omega, 0)$ et de rayon $v = R\omega$.

De plus :

$$v_M^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2 = R^2\omega^2 \cdot 2(1 + \cos \omega t) = 4R^2\omega^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

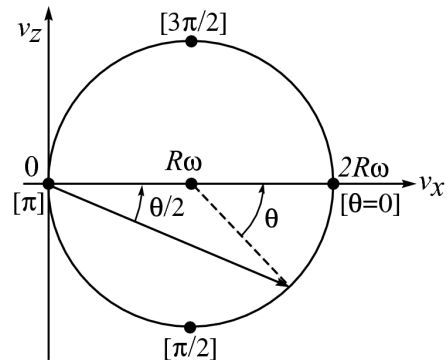
$$\rightarrow v_M = 2R\omega \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|$$

$$6) \vec{a}_{M/R} = \begin{vmatrix} -R\omega^2 \sin \omega t \\ -R\omega^2 \cos \omega t \end{vmatrix} = -\omega^2 \begin{vmatrix} R \sin \theta \\ R \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{a}_{M/R} = -\omega^2 \vec{CM}$$

$$\text{Soit : } a = \omega v = \frac{v^2}{R}; \text{ A. N. : } a \approx 3,7 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-2}.$$

$$7) \text{ Pour } \theta = \pi : \vec{v}_{M/R} = \vec{0} \text{ et } \vec{a}_{M/R} = R\omega^2 \vec{e}_z.$$



→ Complément : Base sphérique

Coordonnées sphériques

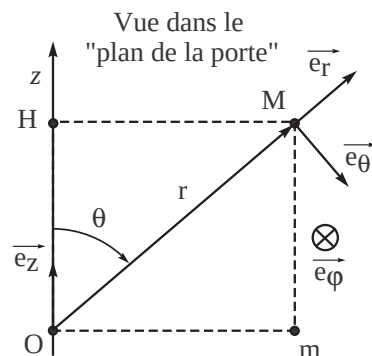
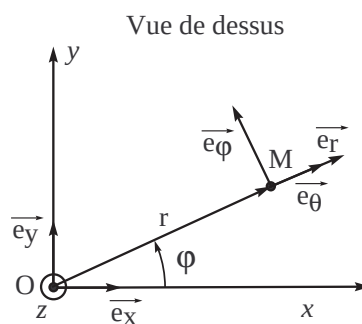
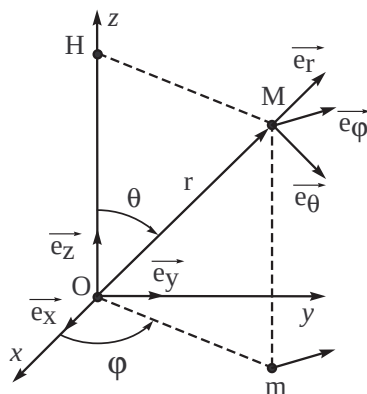
r distance entre O et M $r \in [0; +\infty[$
 θ angle entre $\vec{e}_z$ et $\vec{OM}$ $\theta \in [0, \pi]$
 φ angle entre $\vec{e}_x$ et $\vec{Om}$ $\varphi \in [0, 2\pi[$

base sphérique

$\vec{e}_r$ prolongement unitaire de $\vec{OM}$
 $\vec{e}_\theta$ v. unitaire du « plan de la porte » et $\perp \vec{e}_r$
 $\vec{e}_\varphi$ v. unitaire $\perp$ au « plan de la porte »

Rq : Une B.O.N.D. vérifie la « règle des trois doigts de la main droite » → à vérifier !

$$\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi \quad \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_r \quad \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r = \vec{e}_\theta$$



M a pour coordonnées (r, θ, φ) dans le référentiel $\mathcal{R}$ d'origine O et de Base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ (base « locale » = base définie en M) :

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r$$

$$\vec{v}_{M/R} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi$$