

Aurélien 04/01/08

Circuit à looping; théorème de l'énergie cinétique; base de Frenet

capesa 2004

En poursuivant votre navigation sur ce site, vous acceptez l'utilisation de Cookies vous proposant des publicités adaptées à vos centres d'intérêts.

 Recherche personnalisée

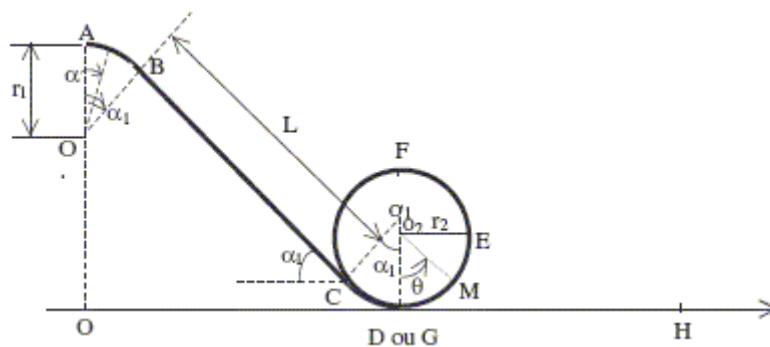
Un chariot de masse m de dimension négligeable se déplace sur un rail situé dans un plan vertical. Les frottements sont considérés comme négligeables.

Le rail est constitué de plusieurs parties : une portion de cercle AB (rayon r_1 , angle α_1) une partie rectiligne BC de longueur L puis une portion de cercle CD de rayon r_1 suivie d'un tour d'hélice : DEFG, de rayon r_2 et d'axe horizontal (voir schéma), prolongée par une portion rectiligne horizontale GH.

On considère pour la résolution de l'exercice que la portion de circuit constituée par un tour d'hélice et le segment rectiligne GH sont contenus dans le plan vertical de la section initiale. La droite BC est tangente en B à la portion de cercle AB et est de même tangente en C à la portion de cercle CD.

Le chariot est lâché sans vitesse initiale du point A. On note g l'intensité du champ de pesanteur terrestre.

Le référentiel terrestre est considéré comme galiléen.



Données : $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$; $m = 1000 \text{ kg}$; $r_1 = 2,5 \text{ m}$; $r_2 = 2,0 \text{ m}$.

Dans un premier temps $\alpha_1 = 50^\circ$.

Donner l'expression littérale de la vitesse du chariot en B en C puis en D en fonction de r_1 , L , α_1 et g .

Le chariot est soumis à son poids et à l'action du support.

L'action du support est constamment perpendiculaire à la vitesse (absence de frottement) et, en conséquence, elle ne travaille pas.

Parcours AB : le travail du poids est moteur en descente

La différence d'altitude entre A et B vaut $h_1 = r_1(1 - \cos \alpha_1)$; travail du poids : $W_1 = mgh_1 = mg r_1(1 - \cos \alpha_1)$

variation de l'énergie cinétique : $\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_B^2 - 0 = \frac{1}{2}mv_B^2$.

théorème de l'énergie cinétique : $\frac{1}{2}mv_B^2 = mg r_1(1 - \cos \alpha_1)$; $v_B^2 = 2g r_1(1 - \cos \alpha_1)$.

$$v_B = [2g r_1(1 - \cos \alpha_1)]^{1/2}.$$

Parcours BC : le travail du poids est moteur en descente

La différence d'altitude entre C et B vaut $h_2 = L \sin \alpha_1$; travail du poids : $W_2 = mgh_2 = mg L \sin \alpha_1$.

variation de l'énergie cinétique : $\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2$.

théorème de l'énergie cinétique : $\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = mg L \sin \alpha_1$.

$$v_C^2 = v_B^2 + 2g L \sin \alpha_1.$$

$$v_C = [v_B^2 + 2g L \sin \alpha_1]^{1/2}.$$

Parcours CD : le travail du poids est moteur en descente

La différence d'altitude entre C et D vaut $h_3 = r_1(1 - \cos \alpha_1)$; travail du poids : $W_3 = mgh_3 = mg r_1(1 - \cos \alpha_1)$

variation de l'énergie cinétique : $\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_D^2 - \frac{1}{2}mv_C^2$.

théorème de l'énergie cinétique : $\frac{1}{2}mv_D^2 - \frac{1}{2}mv_C^2 = mg r_1(1 - \cos \alpha_1)$; $v_D^2 = v_C^2 + 2g r_1(1 - \cos \alpha_1)$.

$$v_D = [v_C^2 + 2g r_1(1 - \cos \alpha_1)]^{1/2}.$$

Déterminer la vitesse du chariot à son passage en M sur l'hélice (assimilée à un cercle) repéré par l'angle θ .

Parcours DM : le travail du poids est résistant en montée.

La différence d'altitude entre M et D vaut $h_4 = r_2(1 - \cos \theta)$; travail du poids : $W_4 = -mgh_4 = -mg r_2(1 - \cos \theta)$

variation de l'énergie cinétique : $\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_M^2 - \frac{1}{2}mv_D^2$.

théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2}mv_M^2 - \frac{1}{2}mv_D^2 = -mg r_2(1 - \cos \theta) ; v_M^2 = v_D^2 - 2g r_2(1 - \cos \theta).$$

$$v_M = [v_D^2 - 2g r_2(1 - \cos \theta)]^{1/2}.$$

En déduire la condition sur L pour que le chariot arrive en E ($\theta_E = 90^\circ$).

On atteint E si la vitesse en ce point est positive ou nulle.

$$\text{Or } v_E^2 = v_D^2 - 2g r_2(1 - \cos 90^\circ) = v_D^2 - 2g r_2.$$

$$\text{d'où : } v_D^2 \geq 2g r_2.$$

$$\text{Or } v_D^2 = v_C^2 + 2g r_1(1 - \cos \alpha_1) \text{ et } v_C^2 = v_B^2 + 2g L \sin \alpha_1 \text{ et } v_B^2 = 2g r_1(1 - \cos \alpha_1)$$

$$v_D^2 = 2g r_1(1 - \cos \alpha_1) + 2g L \sin \alpha_1 + 2g r_1(1 - \cos \alpha_1)$$

$$v_D^2 = 2g(r_1 + r_1)(1 - \cos \alpha_1) + 2g L \sin \alpha_1.$$

$$\text{d'où : } 4g r_1(1 - \cos \alpha_1) + 2g L \sin \alpha_1 \geq 2g r_2.$$

$$2g L \sin \alpha_1 \geq 2g r_2 - 4g r_1(1 - \cos \alpha_1)$$

$$\mathbf{L \geq [r_2 - 2r_1(1 - \cos \alpha_1)] / \sin \alpha_1.}$$

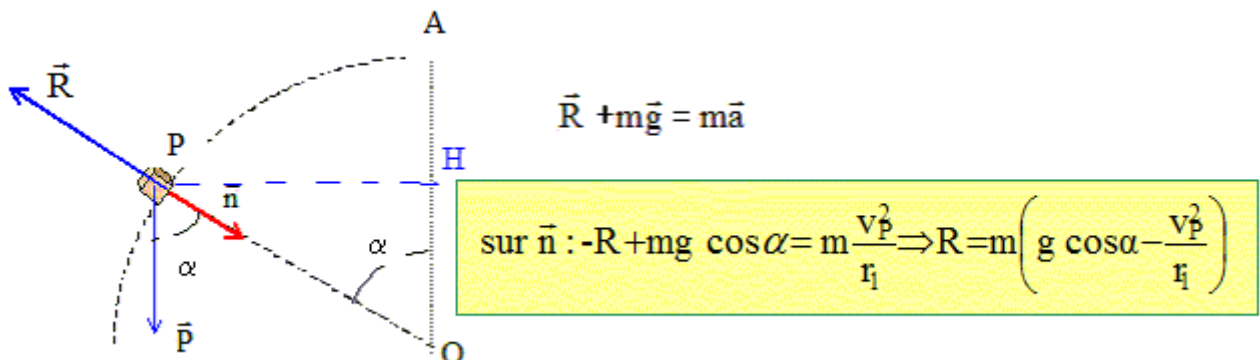


Établir l'expression littérale de la valeur limite de L notée L_1 , pour que le chariot arrive en E. Calculer sa valeur.

$$\mathbf{L_1 = [r_2 - 2r_1(1 - \cos \alpha_1)] / \sin \alpha_1.}$$

$$L_1 = [2 \cdot 5 \cdot (1 - \cos 50^\circ) / \sin 50^\circ]; \mathbf{L_1 = 0,28 \text{ m.}}$$

Établir l'expression de l'intensité de la réaction R de la piste en un point de la trajectoire entre A et B repéré par l'angle α .



En déduire son expression en B. Calculer sa valeur numérique. Conclure.

$$v_B^2 / r_1 = 2g(1 - \cos \alpha_1); R_B = m[g \cos \alpha_1 - 2g(1 - \cos \alpha_1)]; \mathbf{R_B = mg [3 \cos \alpha_1 - 2].}$$

$$R_B = 1000 \cdot (3 \cos 50^\circ - 2) = -72 \text{ N}$$

Le solide a décollé (quitté la piste) avant d'atteindre B.

Déterminer la valeur de α quand le chariot quitte la piste entre A et B.

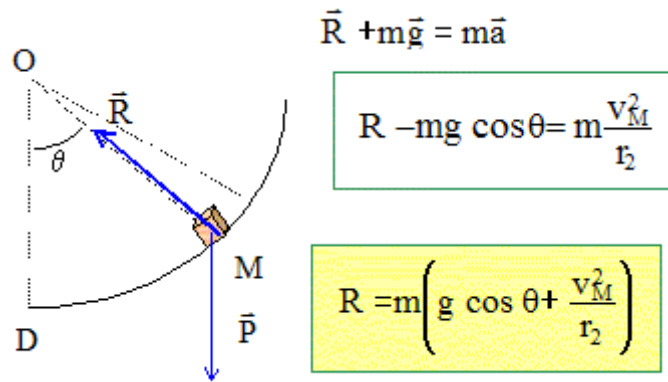
$$R_B = 0 = mg [3 \cos \alpha - 2] \text{ soit } \cos \alpha = 2/3 ; \alpha = 48^\circ.$$

À partir de cette question on va choisir une nouvelle valeur $\alpha_1 = 45^\circ$, afin que le chariot ne quitte pas la piste entre A et B.

Établir l'expression de la réaction du rail sur sa partie rectiligne BC. Calculer sa valeur.

$$R = mg \cos \alpha_1 = 1000 \cdot 9,81 \cdot \cos 45 = 6,9 \cdot 10^4 \text{ N.}$$

Établir l'expression de la réaction du rail sur la partie circulaire (de rayon r_2) en fonction de θ , m , g , r_1 , r_2 , α_1 et L (le chariot circule à l'intérieur du cercle).



$$v_M^2 = v_D^2 - 2g r_2 (1 - \cos \theta) ; \text{ Or } v_D^2 = v_C^2 + 2g r_1 (1 - \cos \alpha_1) \text{ et } v_C^2 = v_B^2 + 2g L \sin \alpha_1 \text{ et } v_B^2 = 2g r_1 (1 - \cos \alpha_1).$$

$$v_M^2 = 2g r_1 (1 - \cos \alpha_1) + 2g L \sin \alpha_1 + 2g r_1 (1 - \cos \alpha_1) - 2g r_2 (1 - \cos \theta).$$

$$v_M^2 = 4g r_1 (1 - \cos \alpha_1) + 2g L \sin \alpha_1 - 2g r_2 (1 - \cos \theta).$$

$$v_M^2 / r_2 = 4g r_1 / r_2 (1 - \cos \alpha_1) + 2g / r_2 L \sin \alpha_1 - 2g (1 - \cos \theta).$$

$$R = mg [3 \cos \theta - 2 + 2 [2r_1 / r_2 (1 - \cos \alpha_1) + L / r_2 \sin \alpha_1]].$$

Déterminer la condition sur L pour que le chariot puisse parcourir la boucle.

La réaction du support doit être positive ou nulle lorsque $\theta = \pi$.

$$3 \cos \pi - 2 + 2 [2r_1 / r_2 (1 - \cos \alpha_1) + L / r_2 \sin \alpha_1] \geq 0.$$

$$2r_1 / r_2 (1 - \cos \alpha_1) + L / r_2 \sin \alpha_1 \geq 2,5.$$

$$L / r_2 \sin \alpha_1 \geq 2,5 - 2r_1 / r_2 (1 - \cos \alpha_1)$$

$$L \geq [2,5 - 2r_1 / r_2 (1 - \cos \alpha_1)] r_2 / \sin \alpha_1.$$

En déduire l'expression de la valeur minimale de L notée L_2 . Calculer sa valeur numérique.

$$L_2 = [2,5 - 2r_1/r_2 (1 - \cos \alpha_1)] r_2 / \sin \alpha_1.$$

$$L_2 = [2,5 - 2,5(1 - \cos 45)] * 2 / \sin 45 = \mathbf{5,0 \text{ m}}.$$

Par raison de sécurité, on veut que la réaction du rail soit toujours supérieure au quart du poids du chariot.

Déterminer la nouvelle valeur minimale L_3 , permettant au chariot d'arriver en G en toute sécurité, après un tour. Calculer sa valeur numérique.

$$3 \cos \pi - 2 + 2[2r_1/r_2 (1 - \cos \alpha_1) + L_3/r_2 \sin \alpha_1] = 0,25$$

$$2r_1/r_2 (1 - \cos \alpha_1) + L_3/r_2 \sin \alpha_1 = 2,625$$

$$L_3/r_2 \sin \alpha_1 = 2,625 - 2r_1/r_2 (1 - \cos \alpha_1)$$

$$L_3 = [2,625 - 2r_1/r_2 (1 - \cos \alpha_1)] r_2 / \sin \alpha_1.$$

$$L_3 = [2,625 - 2,5(1 - \cos 45)] * 2 / \sin 45 = \mathbf{5,35 \text{ m}}.$$

On choisit $L = L_3$, le chariot se retrouve en G après avoir effectué un tour.

Calculer v_G après ce tour.

$$v_D = v_G = [v_C^2 + 2g r_1 (1 - \cos \alpha_1)]^{1/2}; v_C^2 = v_B^2 + 2g L \sin \alpha_1 \text{ et } v_B^2 = 2g r_1 (1 - \cos \alpha_1).$$

$$v_G = [2g r_1 (1 - \cos \alpha_1) + 2g L_3 \sin \alpha_1 + 2g r_1 (1 - \cos \alpha_1)]^{1/2};$$

$$v_G = [2g[2r_1(1 - \cos \alpha_1) + L_3 \sin \alpha_1]]^{1/2}.$$

$$v_G = [2 * 9,81[5 * (1 - \cos 45) + 5,9 * \sin 45]]^{1/2}; \mathbf{v_G = 10,4 \text{ m/s}}.$$

Il aborde alors la dernière partie rectiligne (GH) de la piste sur laquelle il subit une force de freinage de valeur $f = mg/4$.

Calculer la longueur minimale $DS = OH$ de ce circuit à looping pour rester dans des conditions de sécurité.

Sur cette partie horizontale seule la force de freinage travaille, le poids et l'action du plan étant perpendiculaires à la vitesse.

$$\text{Travail résistant des forces de freinage : } W = -f DS = -mg DS/4.$$

$$\text{Théorème de l'énergie cinétique : } 0 - \frac{1}{2}mv_G^2 = -mg DS/4.$$

$$v_G^2 = g DS/2; DS = 2v_G^2/g = 2 * 10,4^2 / 9,81; \mathbf{DS = 22 \text{ m}}.$$

[retour](#) - [menu](#)