

Chasse au plomb, concours Concours commun polytechnique 2017.

En poursuivant votre navigation sur ce site, vous acceptez l'utilisation de Cookies vous proposant des publicités adaptées à

Trajectoires des plombs d'une cartouche.

Un fusil de chasse (arme à feu) ou de ball-trap permet d'envoyer à distance des projectiles au moyen de gaz produits par la déflagration d'un composé chimique. La déflagration va éjecter de la bouche du fusil les sphères de plomb qui éjectent la cartouche avec une vitesse qui, en moyenne, vaut $v_0 = 380 \text{ m.s}^{-1}$, valeur à utiliser dans toutes les applications numériques.

Nous considérons la trajectoire d'un plomb de cartouche dont la dimension est typiquement de quelques millimètres et inférieure au gramme. On néglige la poussée d'Archimède.

Équation du mouvement.

Le projectile est a priori soumis à deux forces : son poids et la force de frottement fluide exercée par l'air qui, dans les cas étudiés, est constituée de la traînée aérodynamique qui s'écrit :

$$F_D = 0,5 \rho_a S C_D v^2.$$

où v est la norme du vecteur vitesse du projectile, ρ_a est la masse volumique de l'air, $S = \pi R^2$ est la section de l'objet exposé dans la direction de l'écoulement et C_D est un coefficient sans dimension appelé « coefficient de traînée ». Pour les vitesses étudiées (vitesses supersoniques situées entre 375 et 420 m/s) et pour les formes quasi-sphériques de projectiles, C_D est 0,44.

Q1. Établir l'équation différentielle du mouvement du centre de masse du plomb de masse m .

$$m \vec{g} - 0,5 \rho_a \pi R^2 C_D v \vec{v} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

On confondra, par la suite, le plomb avec une masse ponctuelle à laquelle on appliquera la force de traînée aérodynamique.

Premier modèle : trajectoire gravitaire.

On considère le cas où la vitesse initiale du projectile est suffisamment faible pour que l'on puisse négliger la force de frottement de l'air.

Q2. Montrer que cela correspondrait à une vitesse initiale v_0 , obéissant à l'inégalité :

$$v_0 \ll [2mg / (\rho_a \pi R^2 C_D)]^{1/2}.$$

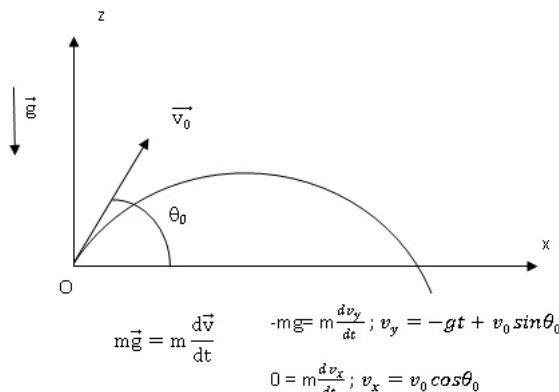
La norme de la force de traînée est négligeable devant la valeur du poids.

$$0,5 \rho_a S C_D v_0^2 \ll mg ; v_0^2 \ll 2mg / (\rho_a \pi R^2 C_D).$$

Par la suite on notera $v_{00} = [2mg / (\rho_a \pi R^2 C_D)]^{1/2}$.

Q3. Projeter l'équation du mouvement sur la base cartésienne. L'origine O est la position de la particule à l'instant

Q4. Établir les équations paramétriques de la vitesse et de la position en fonction du temps.



Q5. Quelle est la nature de cette trajectoire dite « gravitaire » ?

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta_0 t ; x = v_0 \cos \theta_0 t.$$

Éliminer le temps : $z = -\frac{1}{2}gx^2 / (v_0 \cos \theta_0)^2 + \tan \theta_0 x$. La trajectoire est parabolique.

Q6. Montrer que la portée du tir, c'est-à-dire la distance atteinte par le projectile dans le plan horizontal de départ ($Z = 0$), est $X_M = v_0^2 \sin(2\theta_0) / g$ et que la hauteur maximale atteinte par le projectile vaut $H_M = v_0^2 \sin^2(\theta_0) / (2g)$.

$$z=0 \text{ conduit à : } -\frac{1}{2}gx_M^2 / (v_0 \cos \theta_0)^2 + \tan \theta_0 x_M = 0.$$

$$x_M = 0 ; 0,5gx_M / (v_0 \cos \theta_0)^2 = \sin \theta_0 / \cos \theta_0.$$

$$x_M = 2v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 / g = v_0^2 \sin(2\theta_0) / g.$$

La composante verticale de la vitesse est nulle lorsque la hauteur maximale est atteinte :

$$-gt + v_0 \sin \theta_0 = 0 ; t = v_0 \sin \theta_0 / g.$$

$$H_M = -\frac{1}{2}g(v_0 \sin \theta_0 / g)^2 + v_0 \sin \theta_0 v_0 \sin \theta_0 / g = v_0^2 \sin^2(\theta_0) / (2g).$$

Q7. Donner la valeur de l'angle θ_0 pour laquelle la portée est maximale.

$$\sin(2\theta_0) = 1 \text{ soit } \theta_0 = \pi / 4.$$

Q8. Application numérique

La taille des plombs est identifiée par un numéro allant de 1 à 12 qui correspond à une régression arithmétique des diamètres en mm par numéro. Une cartouche de n° 8 possède des plombs plus petits qu'une de n° 4. Le tableau 1 ci-dessous donne les quelques types de plombs et certains résultats numériques obtenus en utilisant les formules ci-dessus pour une vitesse initiale

$m.s^{-1}$. Compléter le tableau. $\rho_{\text{plomb}} = 11350 \text{ kg m}^{-3}$.

n° du plomb	1	5	10
Rayon (mm)	2,0	1,5	0,875
Masse (g)	0,38	0,16	0,031