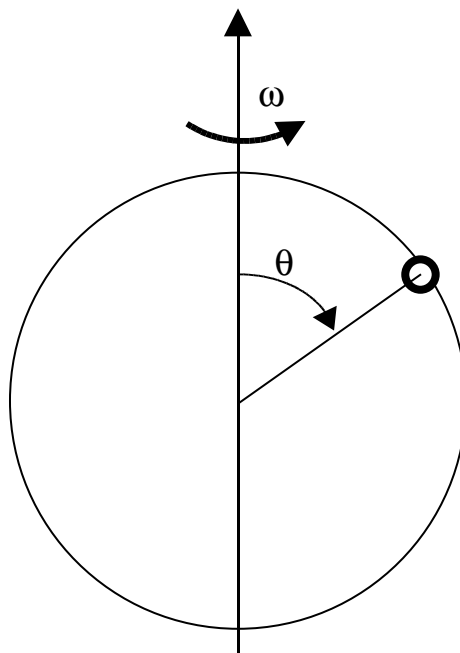


MÉCANIQUE DU POINT CHAP 00

Anneau sur cercle en rotation

Un petit anneau de masse m est astreint à se déplacer sans frottement sur la circonférence de rayon a qui tourne autour de l'axe vertical à la vitesse angulaire constante ω .



1. Etude cinématique:

- Exprimer en fonction de θ la vitesse et l'accélération relatives au référentiel tournant pour l'anneau.
- Exprimer la vitesse et l'accélération d'entraînement pour l'anneau.
- Exprimer l'accélération de Coriolis.

2. Etude dynamique:

- Préciser les forces agissant sur l'anneau dans le référentiel tournant.
- Exprimer leur moment par rapport au centre.
- En déduire l'équation différentielle du mouvement dans le référentiel tournant.

3. Equilibre relatif:

G.P.

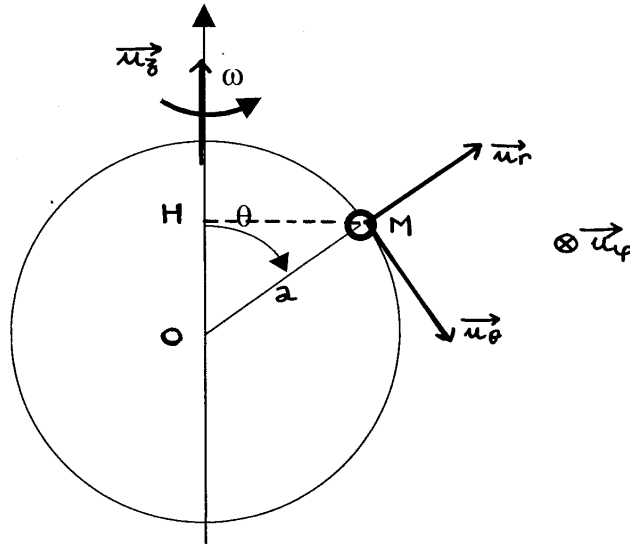
Sujet colle mécanique du point

- Trouver les positions d'équilibre relatif. On posera $p = \frac{(g/a)}{\omega^2}$.
- Etudier la stabilité (on étudiera le cas $p < 1$ et le cas $p > 1$).
- Déterminer la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable.

4. Déterminer la réaction de la circonférence sur l'anneau.

5. Etudier le cas $p = 1$.

Corrigé



Dans le référentiel tournant (lié à la circonférence), l'anneau se déplace selon $\vec{u}_\theta$. On travaillera donc dans la base directe $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$

1) cinématique

- le mouvement relatif est celui sur la circonférence, repéré par θ .

$$\begin{aligned}\vec{v}_r &= a \dot{\theta} \vec{u}_\theta \\ \vec{a}_r &= a \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - a \dot{\theta}^2 \vec{u}_r\end{aligned}$$

- le mouvement d'entraînement est celui du point de la circonférence coïncidant avec M. C'est un mouvement circulaire (rayon HM) à vitesse constante ω

$$\begin{aligned}\vec{v}_e &= \|\vec{HM}\| \omega \vec{u}_\varphi \\ \vec{a}_e &= -\omega^2 \vec{HM}\end{aligned}$$

$$\text{avec } \vec{u}_{HM} = \sin \theta \vec{u}_r + \cos \theta \vec{u}_\theta$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_e &= a \sin \theta \omega \vec{u}_\varphi \\ \vec{a}_e &= -a \sin \theta \omega^2 (\sin \theta \vec{u}_r + \cos \theta \vec{u}_\theta)\end{aligned}$$

- l'accélération de Coriolis vaut

$$\begin{aligned}\vec{a}_c &= 2\vec{\omega}_c \wedge \vec{v}_r \\ &= 2\omega \vec{u}_z \wedge 2\dot{\theta} \vec{u}_\theta\end{aligned}$$

avec $\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta = \cos\theta \vec{u}_\varphi$

$$\begin{array}{c|cc}\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi & \begin{vmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \\ \hline & & \end{array}$$

$$\boxed{\vec{a}_c = 2a\omega\dot{\theta}\cos\theta \vec{u}_\varphi}$$

2) dynamique

- forces : - le poids

- la réaction de la circonférence sur l'anneau M
(en l'absence de frottement, la puissance totale
des actions de contact est nulle)

$$\begin{aligned}P &= \vec{R}_{\text{circ} \rightarrow M} \cdot \vec{v}_{M/\text{circ}} \\ &= \vec{R} \cdot \vec{v}_r = 0\end{aligned}$$

$$\vec{R} \perp \vec{v}_r$$

donc

$$\vec{R} \perp \vec{u}_\theta \quad)$$

- la force d'inertie d'entraînement.

Ici, le mouvement d'entraînement est à ω constant.
Donc cette force est centrifuge et vaut $m\omega^2 \overline{HM}$

- la force d'inertie de Coriolis.

$$m\vec{g} = -mg(\cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta)$$

$$\vec{R} = R_r \vec{u}_r + R_\varphi \vec{u}_\varphi$$

$$\vec{F}_{ce} = m\omega^2 a \sin\theta (\sin\theta \vec{u}_r + \cos\theta \vec{u}_\theta)$$

$$\vec{F}_{ic} = -2m a \omega \dot{\theta} \cos\theta \vec{u}_\varphi$$

- moments en 0

le mouvement relatif est une rotation.

Pour l'étudier, on peut travailler en considérant $F(\theta)$

ou $\mathcal{M}(\theta)$ ou travailler par l'énergie. Ici on choisit $\mathcal{M}$.

$$\text{avec } \vec{\mathcal{M}}(0) = \vec{OM} \wedge \vec{F} \\ = 2 \vec{ur} \wedge \vec{F}$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_{mg}(0) &= m g a \sin \theta \vec{ur} \\ \vec{\mathcal{M}}_R(0) &= -2 R \varphi \vec{u_\theta} \\ \vec{\mathcal{M}}_{\text{ent}}(0) &= m \omega^2 a^2 \sin \theta \cos \theta \vec{ur} \\ \vec{\mathcal{M}}_{\text{cor}}(0) &= 2 m a^2 \omega \dot{\theta} \cos \theta \vec{u_\theta} \end{aligned}$$

- équation du mouvement dans le référentiel tournant

$$\vec{\mathcal{M}}(0) = \frac{d\vec{\sigma}(0)}{dt}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \vec{\sigma}(0) &= \vec{OM} \wedge m \vec{v} \quad (\vec{v} = \vec{v}/\text{ref tournant}) \\ &= 2 \vec{ur} \wedge m a \dot{\theta} \vec{u_\theta} \\ &= m a^2 \dot{\theta} \underbrace{\vec{ur}}_{\text{fixe dans le ref tournant}} \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{\sigma}(0)}{dt} = m a^2 \ddot{\theta} \vec{ur}$$

$$/ \vec{u_\theta} : -2 R \varphi + 2 m a^2 \omega \dot{\theta} \cos \theta = 0 \quad \text{d'où } R \varphi$$

$$/ \vec{ur} : m g a \sin \theta + m \omega^2 a^2 \sin \theta \cos \theta = m a^2 \ddot{\theta}$$

(note' $\mathcal{M}$ dans la suite).

$$\mathcal{M} = m \omega^2 a^2 \sin \theta (\cos \theta + P)$$

$$\text{avec } P = \frac{g}{2 \omega^2}$$

3) équilibre relatif

- à l'équilibre relatif :

$$\mathcal{M}(\theta) = m \omega^2 a^2 \sin \theta_e (\cos \theta_e + P) = 0$$

donc

$$\begin{aligned} \sin \theta_e &= 0 & \theta_e &= 0 \\ & & \theta_e &= \pi \\ \cos \theta_e &= -P & (\text{si } P \leq 1) \end{aligned}$$

- stabilité

→ on doit étudier $\eta(\theta)$ au voisinage de θ_e . On fait un D.L.

$$\eta(\theta) = \underbrace{\eta(\theta_e)}_{\text{nul}} + (\theta - \theta_e) \left(\frac{d\eta}{d\theta} \right)_{\theta_e} \quad \text{en supposant}$$

que $\left(\frac{d\eta}{d\theta} \right)_{\theta_e}$ est différent de zéro et en travaillant alors au premier ordre en $(\theta - \theta_e)$

$$\bullet \text{ si } \left(\frac{d\eta}{d\theta} \right)_{\theta_e} < 0 \quad \begin{array}{ll} \theta > \theta_e & \eta(\theta) < 0 \quad \text{donc } \ddot{\theta} < 0 \quad \theta \searrow \\ \theta < \theta_e & \eta(\theta) > 0 \quad \text{donc } \ddot{\theta} > 0 \quad \theta \nearrow \end{array}$$

L'équilibre est stable (retour vers la position d'équilibre)

$$\bullet \text{ si } \left(\frac{d\eta}{d\theta} \right)_{\theta_e} > 0 \quad \text{l'équilibre est instable}$$

$$\rightarrow \left(\frac{d\eta}{d\theta} \right)_{\theta_e} = m a^2 \omega^2 [\cos \theta_e (\cos \theta_e + p) - \sin^2 \theta_e]$$

$$\bullet \text{ en } \theta_e = 0 \quad \left(\frac{d\eta}{d\theta} \right)_{\theta_e=0} = m a^2 \omega^2 (1 + p) > 0 \quad \text{équilibre instable}$$

$$\bullet \text{ en } \theta_e = \pi \quad \left(\frac{d\eta}{d\theta} \right)_{\theta_e=\pi} = m a^2 \omega^2 (1 - p)$$

$p > 1$	< 0	équilibre stable
$p < 1$	> 0	équilibre instable

$$\bullet \text{ en } \theta_e \text{ tel que } \cos \theta_e = -p \quad (p < 1)$$

$$\left(\frac{d\eta}{d\theta} \right)_{\theta_e} = m a^2 \omega^2 (p^2 - 1) < 0 \quad \text{équilibre stable}$$

en résumé :

$p < 1 \quad (\omega^2 > \frac{g}{2})$	équilibre stable pour θ_e tel que $\cos \theta_e = -p$
$p > 1 \quad (\omega^2 < \frac{g}{2})$	équilibre stable pour $\theta_e = \pi$

- période des oscillations au voisinage de l'équilibre stable

$$\underline{p < 1}$$

$$(\cos \theta_e = -p)$$

$$\eta(\theta) \simeq (\theta - \theta_e) m a^2 \omega^2 (p^2 - 1) = m a^2 \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \Omega^2 (\theta - \theta_e) = 0$$

$$\text{avec } \boxed{\Omega = \omega \sqrt{1-p^2}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}$$

$$\underline{p > 1}$$

$$(\theta_e = \pi)$$

$$\eta(\theta) = (\theta - \pi) m a^2 \omega^2 (1-p) = m a^2 \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \Omega^2 (\theta - \pi) = 0$$

$$\text{avec } \boxed{\Omega = \omega \sqrt{p-1}}$$

4) → on a précédemment obtenu :

$$R_p = 2 m a \omega \dot{\theta} \cos \theta$$

→ Pour obtenir R_r il faut écrire le principe fondamental

$$m \vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} = m \vec{a}_{\text{ref tournant}}$$

$$\curvearrowleft -mg \cos \theta + R_r + m \omega^2 a \sin^2 \theta + 0 = -m a \dot{\theta}^2$$

... etc

5) étude du cas $p=1$

$$\eta_{(\theta)} = m \omega^2 a^2 \sin \theta (\cos \theta + 1)$$

La position d'équilibre $\theta=0$ reste instable.

La position d'équilibre $\theta=\pi$ est racine double.

La dérivée $\left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)_{\theta=\pi}$ est nulle. Il faut donc poursuivre le

développement limité de η plus loin avec :

$$\eta(\theta) = \cancel{\eta(\pi)} + (\theta - \pi) \cancel{\left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)_{\pi}} + \frac{(\theta - \pi)^2}{2!} \left(\frac{d^2\eta}{d\theta^2}\right)_{\pi} + \frac{(\theta - \pi)^3}{3!} \left(\frac{d^3\eta}{d\theta^3}\right)_{\pi} + \dots$$

en calculant $\left(\frac{d^2\eta}{d\theta^2}\right)_{\pi}$, $\left(\frac{d^3\eta}{d\theta^3}\right)_{\pi}$... etc si nécessaire.

Ici, il est plus rapide de faire $\theta = \pi + \alpha$. L'équilibre est en $\alpha=0$

$$\eta(\alpha) = m \omega^2 a^2 \sin \alpha (\cos \alpha - 1)$$

Travaillons au 3^e ordre en α :

$$= m \omega^2 a^2 \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6} \right) \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} - 1 \right)$$

$$\boxed{\eta(\alpha) = -m \omega^2 a^2 \frac{\alpha^3}{2}}$$

L'équation pour α "petit" devient :

$$-m\omega^2 a^2 \frac{\alpha^3}{2} = m a^2 \ddot{\alpha}$$

Le moment est un moment de rappel, l'équilibre est stable

$$\ddot{\alpha} < 0 \text{ si } \alpha > 0$$

$$\ddot{\alpha} > 0 \text{ si } \alpha < 0$$

L'équation au voisinage de l'équilibre est

$$\ddot{\alpha} + \frac{\omega^2}{2} \alpha^3 = 0$$

Les oscillations ne sont pas harmoniques.
