

Est-ce suffisant pour l'arracher à l'attraction terrestre ?

4) Chute du satellite

4.a) En admettant que les deux formules établies en **2)** restent correctes par la suite, déterminer la loi donnant l'évolution de R au cours du temps dans le cas du frottement du satellite dans l'atmosphère (de masse volumique ρ) : $\vec{f} = -k\rho\vec{v}$. On utilisera le théorème de l'énergie mécanique.

4.b) Dans le cas d'un satellite spot ($m_{\text{sat}} = 2 \text{ tonnes}$) de coefficient $k = 1,35 \cdot 10^5 \text{ uSI}$, à 822 km d'altitude la masse volumique de l'air est $\rho = 3 \cdot 10^{-14} \text{ kg.m}^{-3}$. Calculer de combien de mètres le satellite chute en 1 jour.

4.c) S'il évoluait à 250 km d'altitude, la masse volumique de l'air serait $\rho = 6,8 \cdot 10^{-11} \text{ kg.m}^{-3}$. Effectuer le même calcul et conclure.

Rép. : **1)** $R = 42\,300 \text{ km}$; $h = 35\,900 \text{ km}$; **2)** $\mathcal{E}_m = -\frac{1}{2}G\frac{M_T \cdot m_{\text{sat}}}{R}$; **3)** $\mathcal{E}_m = m_{\text{sat}} \cdot (8,5 \cdot 10^6) > 0$;

4.a) $R(t) = R(0) \cdot \exp\left(-\frac{2k\rho}{m_{\text{sat}}} \cdot t\right)$; **4.b)** $\Delta z = -2,5 \text{ m/jour}$; **4.c)** $\Delta z = -5,3 \text{ km/jours}$

Ex-M7.10 La station spatiale internationale

En faisant l'hypothèse que ISS a un mouvement circulaire (excentricité = 0,00031) et une altitude de 384 km , déterminer sa vitesse v ainsi que sa période T en fonction uniquement de R_T , $g_0 = G(R_T)$ (champ gravitationnel terrestre à la surface de la Terre) et R_{ISS} .

Effectuer les applications numériques. **Données :** $R_T = 6\,400 \text{ km}$

Rép. : $v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^2}{R_{\text{ISS}}}}$ et $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R_{\text{ISS}}^3}{g_0 R_T^2}}$

■ Approche des orbites elliptiques

Ex-M7.11 Méthode du vecteur excentricité [d'après école de l'air 1987]

On se propose d'étudier le mouvement d'un satellite autour de la Terre. La seule force est l'attraction newtonienne de la Terre $\vec{F} = -\frac{\mu m}{r^2} \vec{e}_r$. Le satellite M de masse m est repéré par ses coordonnées polaires r et θ .

1) Établir la relation différentielle liant la vitesse $\vec{v}$ et $\vec{e}_\theta$. Cette relation s'intègre sous la forme $\vec{v} = \alpha(\vec{e}_\theta + \vec{e})$ où $\vec{e}$ est un vecteur constant appelé vecteur excentricité et α une constante à déterminer en fonction de μ et C (où C est la constante des aires).

2) Calculer le produit scalaire $\vec{v} \cdot \vec{e}_\theta$. En déduire l'équation polaire de la trajectoire sous la forme :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \quad \text{où} \quad e = \|\vec{e}\| \quad \text{et} \quad \theta_0 = (\vec{e}_y, \vec{e}).$$

Exprimer p en fonction de μ et C .

3) Montrer que l'on peut exprimer l'énergie totale $\mathcal{E}$ sous la forme : $\mathcal{E} = k(e^2 - 1)$. Exprimer k en fonction de μ , C et m .

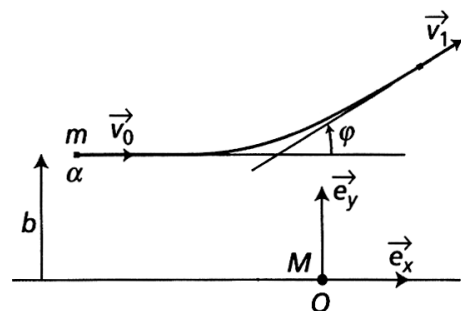
Rép. : **1)** $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\mu}{C} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \rightarrow \vec{v} = \frac{\mu}{C}(\vec{e}_\theta + \vec{e})$; **2)** $k = \frac{\mu^2 m}{2C^2}$

■ Autres exercices

Ex-M7.12 Expérience de Rutherford

L'expérience de Rutherford est l'expérience historique qui a établi le caractère lacunaire de la matière, l'essentiel de la masse d'un atome étant concentrée dans un noyau très petit devant les dimensions de l'atome.

On se propose d'étudier la déviation angulaire φ de la trajectoire d'une particule α par un noyau massif de masse M et de charge Ze . Une particule α est un noyau d'hélium de masse m et de charge $2e$ (ion hélion).



La particule α arrive avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ et une ordonnée b loin du noyau, situé à l'origine des coordonnées.

1) En supposant la masse M suffisamment grande pour que le noyau massif reste pratiquement immobile, déterminer deux constantes du mouvement de la particule α .

2) En déduire que le mouvement est plan, et déterminer la vitesse $\vec{v}_1$ loin du noyau massif, après l'interaction.

3)

3.a) Montrer que la composante selon $\vec{e}_y$ de l'accélération de la particule α peut s'exprimer en fonction de θ et de $\dot{\theta}$, où r et θ représentent les coordonnées polaires de la particule α dans le plan de la trajectoire.

3.b) Déterminer la composante selon $\vec{e}_y$ de $\vec{v}_1$ et en déduire l'angle de déviation φ .

4) On répète l'expérience de Rutherford en envoyant sur une cible fixe dans le référentiel du laboratoire et constitué par une très mince feuille d'or, des hélions d'énergie $\mathcal{E}_0 = 5 \text{ MeV}$. On supposera la masse des atomes d'or grande devant la masse des hélions. On observe une déviation des hélions atteignant 150° au maximum.

4.a) Calculer la valeur minimale $b_{\min}$ du paramètre d'impact.

4.b) Calculer la plus petite distance d'approche r_0 d'un hélion et d'un noyau d'or, lorsque le paramètre d'impact a pour valeur $b_{\min}$. En déduire une borne supérieure de la valeur du rayon du noyau de l'atome d'or.

Donnée : Numéro atomique de l'or $Z = 79$.

Rép : 3.b) $\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 mbv_0^2}$; 4.b) $b_{\min} = 6,17 \cdot 10^{-15} \text{ m}$; 4.b) $r_0 = 4,5 \cdot 10^{-14} \text{ m}$.

Ex-M7.13 Force centrale en $1/r^3$ (**, à chercher après avoir travaillé le reste)

Un point matériel M de masse m est soumis, dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, à une force d'expression $\vec{F} = -\frac{a}{r^3} \vec{e}_r$ en coordonnées sphériques de centre O , a étant une constante positive. À l'instant initial, M est à la position M_0 telle que $\vec{OM}_0 = r_0 \vec{e}_x$, avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0(\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y)$.

1) Montrer que le mouvement est plan et déterminer le plan de la trajectoire.

2) Montrer que la force $\vec{F}$ est une force conservative. En déduire l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(r)$ dont elle dérive (on prendre $\mathcal{E}_p(\infty) = 0$). Déterminer l'expression de l'énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ compte tenu des conditions initiales.

3) r_0 étant donné, indiquer la condition sur v_0 pour que le système soit dans un état de diffusion.

4) La particule est dans un état de diffusion et $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

a) Établir que $\dot{r} = \frac{r_0 v_0}{r^2} \frac{dr}{d\theta}$. En déduire que $\dot{r} = -r_0 v_0 u'_\theta$ avec $u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$ et $u'_\theta = \frac{du}{d\theta}$.

b) Exprimer la conservation de l'énergie mécanique en fonction de la variable u et de u'_θ .

En déduire que u vérifie l'équation : $u''_\theta + \eta^2 u = 0$ avec $\eta = \sqrt{1 - \frac{a}{mr_0^2 v_0^2}}$.

c) Déterminer l'équation polaire de la trajectoire compte tenu des conditions initiales.

d) Donner l'allure de la trajectoire pour $\eta = 0, 1$, $\theta_0 = 0$ et $r_0 = 1 \text{ m}$.

Solution Ex-M7.13

1) La force est centrale de centre de force O . Le T.M.C. pour M évalué en O dans le référentiel $\mathcal{R}$ s'écrit : $\left(\frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}}(M)}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \mathcal{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \times \vec{F} = \vec{0}$, soit $\vec{L}_{O/\mathcal{R}}(M) = \vec{Cte}$, d'expression :

$$\vec{L}_{O/\mathcal{R}}(M) = \begin{cases} \vec{L}_{O/\mathcal{R}}(M_0) & = r_0 \vec{e}_x \times m v_0 (\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y) = m r_0 v_0 \sin \alpha \vec{e}_z \\ \vec{OM} \times \vec{v}_{M/\mathcal{R}} & = r \vec{e}_r \times (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = m C \vec{e}_z \end{cases}$$

avec $C = r^2 \dot{\theta} = r_0 v_0 \sin \alpha$, la constante des aires.