

sur la partie du câblage qui baigne dans B .

3. En traduisant l'équilibre de la balance, donner la relation entre B , i , g , m et les dimensions de la balance. Si le champ magnétique $\vec{B}$ pointe comme indiqué sur le schéma, quel signe faut-il donner au courant i pour observer l'équilibre de la balance?

4. Avec un courant $i = 1,0 \text{ A}$, $\ell = 10 \text{ cm}$, $\ell' = 1,0 \text{ cm}$, $OP = 10 \text{ cm}$, quelle intensité de champ magnétique peut-on mesurer, sachant que les masses marquées à disposition sont d'un décigramme?

3. Champ magnétique terrestre ★★

(solution page 778)

En un point de la surface de la Terre, on veut déterminer l'intensité B_h de la composante horizontale du champ magnétique terrestre en étudiant les petites oscillations d'une boussole dans le plan horizontal. Cette boussole est un petit solide qui peut pivoter sans frottements autour de son axe vertical $(O, \vec{u}_z)$. Elle est assimilable à un dipôle de moment magnétique $\vec{m}$ horizontal et de moment d'inertie J par rapport à son axe $(O, \vec{u}_z)$. On pose $\alpha = (\vec{u}, \vec{m})$, où $\vec{u}$ a la direction et le sens de la composante horizontale du champ magnétique terrestre à l'endroit considéré.

1. Établir l'équation différentielle du mouvement de la boussole (équation vérifiée par l'angle $\alpha(t)$). Quelle est la position d'équilibre stable de la boussole?

2. En déduire la période τ_0 des petites oscillations en fonction de B_h , J et $m = |\vec{m}|$.

3. Les valeurs de m et J n'étant pas connues, on utilise le champ magnétique $\vec{B}_e$ créé par une bobine parcourue par un courant pour s'en affranchir. On place d'abord la bobine de façon que $\vec{B}_e$ et $\vec{B}_h$ soient parallèles et de même sens, puis on mesure la période τ_1 des petites oscillations. On inverse ensuite le sens du courant dans la bobine et on mesure la nouvelle période τ_2 des oscillations. Exprimer τ_1 et τ_2 (en supposant $B_h < B_e$). En déduire B_h en fonction de l'intensité B_e du champ créé par la bobine et du rapport τ_1/τ_2 .

4. On mesure $\tau_1/\tau_2 = 0,78$ et $B_e = 0,10 \text{ mT}$. En déduire la valeur de B_h .

5. On admet que l'expression du champ magnétique créé au point M de coordonnées polaires (r, θ) par un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ centré en O s'écrit, en coordonnées polaires de centre O et d'axe $\vec{\mathcal{M}}$ (voir figure 21.7),

$$\vec{B} = B_r \vec{u}_r + B_\theta \vec{u}_\theta \quad \text{avec} \quad B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2 \mathcal{M} \cos \theta}{r^3} \quad \text{et} \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \sin \theta}{r^3}.$$

On donne la valeur de la perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$. Rappeler sur un schéma comment est placé le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}_T$ responsable

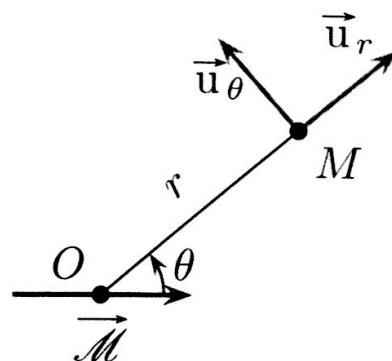


FIG. 21.7. Repère polaire lié au moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$.

de la création du champ magnétique terrestre. Sachant que le rayon terrestre est $R_T = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$ et que l'expérience décrite dans les questions précédentes a été effectuée en France (latitude d'environ 45°), déterminer la norme $\mathcal{M}_T$ du moment magnétique terrestre.

6. À quel endroit sur la Terre la composante horizontale du champ magnétique est-elle la plus grande ? Quelle est sa valeur ?

4. Champ non uniforme (PCSI) ★★★

(solution page 779)

Une barre métallique homogène, de longueur ℓ et de masse m , peut pivoter sans frottement (liaison pivot parfaite) par rapport à l'axe horizontal $(O, \vec{u}_z)$ (voir figure 21.8). Son extrémité inférieure est en contact sans frottement avec un arc de cercle métal-

Pour que la balance soit en équilibre, il faut $i < 0$ si $B > 0$, c'est-à-dire si le champ magnétique pointe vers le lecteur.

4. Avec une masse de $1,0 \times 10^{-4}$ kg et les dimensions indiquées, le champ magnétique mesurable est

$$B = - \frac{1,0 \times 10^{-4} \times 10 \times 0,10}{1,0 \times 0,1 \times 1,0} \Rightarrow \boxed{B = 0,1 \text{ T}} .$$

Cela correspond à l'ordre de grandeur du champ magnétique au pôle d'un barreau aimanté. Pour mesurer des champs magnétiques moins intenses, il faut abaisser la valeur de i . Les inconvénients de la balance de Cotton par rapport au teslamètre à effet Hall sont :

- la nécessité que le champ magnétique à mesurer soit horizontal ;
- la taille de la zone où le champ est uniforme pour que les expressions calculées soient valables.

3 Champ magnétique terrestre

1. La boussole est soumise au couple magnétique $\Gamma = \vec{m} \wedge \vec{B}_h$, qui tend à rendre $\vec{m}$ parallèle à $\vec{B}_h$ et de même sens que lui. C'est la position d'équilibre stable de la boussole (voir théorème 21.6 page 584). Le théorème du moment cinétique appliqué à la boussole dans le référentiel terrestre s'écrit, en projection sur l'axe vertical de rotation de la boussole,

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = (\vec{m} \wedge \vec{B}_h) \cdot \vec{u}_z = m B_h \sin(\vec{m}, \vec{B}_h) = -m B_h \sin \alpha \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{m B_h}{J} \sin \alpha = 0} .$$

2. Au voisinage de la position d'équilibre stable ($\alpha = 0$), on peut linéariser le sinus et l'équation du mouvement devient $\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mB_h}{J} \alpha = 0$. C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation temporelle $\omega = \sqrt{mB_h/J}$, donc de période temporelle $\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega}$, d'où $\tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mB_h}}$.

3. Lorsqu'on ajoute le champ créé par la bobine, on remplace B_h par $B_h + B_e$ (champs de même sens) ou bien $|B_h - B_e|$ (champs de sens opposés) dans l'expression de la période. La valeur absolue est nécessaire car $B_e > B_h$ et il faut une norme de champ (positive) dans l'expression de la période (positive). Les périodes correspondantes sont

$$\tau_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m(B_h + B_e)}} \quad \text{et} \quad \tau_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m|B_h - B_e|}}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\tau_1}{\tau_2} = \sqrt{\frac{B_e - B_h}{B_h + B_e}}.$$

De la dernière équation, on déduit $B_h = \frac{1 - (\tau_1/\tau_2)^2}{1 + (\tau_1/\tau_2)^2} B_e$.

4. Avec les valeurs numériques données, on trouve $B_h = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ T}$.

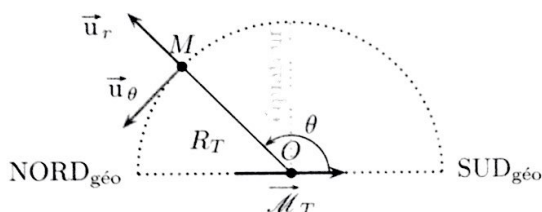


FIG. E.21.1. Le moment magnétique terrestre pointe du nord géographique vers le sud géographique.

5. Le nord géographique correspond à un sud magnétique et inversement, d'où le placement du moment magnétique terrestre $\vec{M}_T$ sur la figure E.21.1. Le vecteur unitaire $\vec{u}_\theta$ est donc tangent au sol et pointe localement du sud vers le nord géographique (il suit un méridien en pointant vers les latitudes croissantes). La composante horizontale (parallèle au sol) du champ magnétique correspond à la composante sur $\vec{u}_\theta$ en $r = R_T$ (à la surface de la Terre) dans le système de coordonnées polaires donné par l'énoncé. La latitude géographique est repérée par rapport à l'équateur alors que θ l'est à partir du pôle sud géographique (nord magnétique). Il faut donc ajouter 90° à la latitude pour avoir $\theta : \theta_{\text{exp}} = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$.

$$B_h = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M}_T \sin \theta_{\text{exp}}}{R_T^3} \Rightarrow \mathcal{M}_T = \frac{4\pi}{\mu_0} \frac{R_T^3}{\sin \theta_{\text{exp}}} B_h = 8,2 \cdot 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

6. La composante horizontale (selon $\vec{u}_\theta$) est la plus grande quand $\theta = \pi/2$, c'est-à-dire à l'équateur. Avec cette valeur de θ et la valeur de $\mathcal{M}_T$ obtenue précédemment, on trouve

$$B_{h \text{ max}} = 3,1 \cdot 10^{-5} \text{ T}.$$

4 Champ non uniforme (PCSI)

1. L'expression de la force de Laplace élémentaire s'appliquant en un point M de la barre est $d\vec{F}_{\text{la}} = i d\vec{\ell}_M \wedge \vec{B}(M)$, soit $d\vec{F}_{\text{la}} = i dr \vec{u}_r \wedge \frac{r}{\ell} B_0 \vec{u}_z$. En calculant le produit vectoriel,

$d\vec{F}_{\text{la}} = -ir dr \frac{B_0}{\ell} \vec{u}_\theta$. Dans cette expression, dr correspond à un accroissement élémentaire algébrique de r . En l'occurrence, $dr < 0$ car i est orienté de sorte à parcourir la barre en direction du point O , c'est-à-dire vers les r décroissants. Pour avoir la résultante, il faut sommer les forces élémentaires. Cela revient à calculer l'intégrale (dans le sens des r décroissants) des forces élémentaires,

$$\vec{F}_{\text{la}} = \int_A^O d\vec{F}_{\text{la}} = -i \frac{B_0}{\ell} \vec{u}_\theta \int_{r=\ell}^0 r dr = i \frac{B_0}{\ell} \frac{\ell^2}{2} \vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{F}_{\text{la}} = i B_0 \frac{\ell}{2} \vec{u}_\theta.$$

Les grandeurs i , B_0 , ℓ et $\vec{u}_\theta$ sont sorties de l'intégrale car elles sont constantes vis-à-vis de la variable r d'intégration. Si le champ magnétique avait été uniforme d'intensité B_0 , la résultante aurait été $\vec{F}_{\text{unif}} = i\ell B_0 \vec{u}_\theta$. Le champ étudié étant globalement moins intense que B_0 (voir figure E.21.2), il ne faut pas s'étonner que la résultante des forces de Laplace ait une norme inférieure à celle de $\vec{F}_{\text{unif}}$.

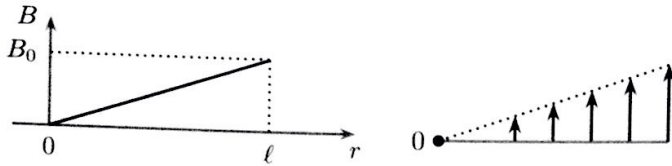


FIG. E.21.2. Champ magnétique en fonction de r . Schématisation de quelques forces de Laplace élémentaires s'appliquant sur la barre.

2. Le moment élémentaire au point O d'une force de Laplace élémentaire s'appliquant en un point M de la barre est défini par $d\vec{\mathcal{M}}_{\text{la}} = \vec{OM} \wedge d\vec{F}_{\text{la}} = r \vec{u}_r \wedge [-ir dr \frac{B_0}{\ell} \vec{u}_\theta]$, soit $d\vec{\mathcal{M}}_{\text{la}} = -ir^2 dr \frac{B_0}{\ell} \vec{u}_z$. Le moment par rapport à l'axe $(O, \vec{u}_z)$ s'obtient en projetant ce vecteur sur $\vec{u}_z$, c'est-à-dire en effectuant le produit scalaire avec $\vec{u}_z$, ce qui donne

$$d\mathcal{M}_{\text{la}} = -ir^2 dr \frac{B_0}{\ell}.$$

Le moment total des actions de Laplace s'obtient en sommant ces moments élémentaires, c'est-à-dire en intégrant le long de la barre dans le sens conventionnel du courant, qui est le sens des r décroissants,

$$\mathcal{M}_{\text{la}} = \int_{r=\ell}^0 d\mathcal{M}_{\text{la}} = \int_{r=\ell}^0 -ir^2 dr \frac{B_0}{\ell} = -i \frac{B_0}{\ell} \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=\ell}^0 \Rightarrow \mathcal{M}_{\text{la}} = \frac{1}{3} i B_0 \ell^2.$$

Ce moment est positif si i et B_0 sont positifs : les actions de Laplace ont tendance à faire tourner la barre dans le sens trigonométrique dans ce cas, ce qui est prévisible par la règle des trois doigts de la main droite. Ce test permet de détecter une erreur sur le sens dans lequel l'intégrale est calculée. Si le champ magnétique était uniforme, les actions de Laplace seraient réparties uniformément sur la barre et le point d'application serait au milieu de la barre. Le bras de levier de $\vec{F}_{\text{unif}}$ serait donc $\frac{\ell}{2}$ et le moment en O des actions de Laplace serait $\vec{\mathcal{M}}_{\text{unif}} = \frac{\ell}{2} \vec{u}_r \wedge \vec{F}_{\text{unif}} = \frac{1}{2} i B_0 \ell^2 \vec{u}_z$. En projection sur $\vec{u}_z$, le moment scalaire correspondant est $\mathcal{M}_{\text{unif}} = \frac{1}{2} i B_0 \ell^2$. Ce moment est plus intense que $\mathcal{M}_{\text{la}}$ car le champ uniforme $B_0 \vec{u}_z$ est globalement plus intense que le champ de la forme $\vec{B} = B_0 \frac{r}{\ell} \vec{u}_z$.

3. Les seules actions exerçant un moment par rapport à l'axe $(O, \vec{u}_z)$ sur la barre sont le poids de la barre et les actions de Laplace. Le poids s'applique au milieu de la barre car celle-ci est homogène : le bras de levier du poids est donc $\frac{\ell}{2} \sin \theta$. L'équilibre de la barre, s'il est physiquement possible, se traduit en exprimant que la somme des moments est nulle,

$$\mathcal{M}_{\text{la}} - mg \frac{\ell}{2} \sin \theta_{\text{eq}} = 0 \Rightarrow \sin \theta_{\text{eq}} = \frac{2B_0 \ell i}{3mg} \text{ si } \frac{2B_0 \ell i}{3mg} \in [-1, 1].$$

Le sinus n'existe que si sa valeur est dans l'intervalle $[-1, 1]$, ce qui n'est pas toujours le cas. Par exemple, si le produit $B_0 i$ est trop grand (cas de forces de Laplace intenses), l'équilibre n'existe pas et la barre ne fait que tourner autour de son axe. En pratique, elle ne le fait pas, car le point A quitte la zone de contact électrique et le courant dans le circuit s'annule. Avec les valeurs numériques données, l'angle θ_{eq} existe et $\theta_{\text{eq}} = 6,6 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 3,8^\circ$. L'écart par rapport à la verticale est tout à fait observable avec ces valeurs usuelles. En pratique, pour une expérience réalisée en classe, le champ magnétique est créé par un aimant en fer à cheval et est quasiment uniforme sur une partie de la barre. Les expressions sont donc un peu différentes (en particulier le préfacteur $2/3$), mais cela ne change pas les ordres de grandeur.

4. Par définition, le p...
On en déduit...
s'appliquant à...
sur plus d'un...
que de l'est le...



4. Par définition, le point d'application est N tel que $\mathcal{M}_{la} = ON \times F_{la}$ car ON est le bras de levier. On en déduit $ON = \frac{2}{3} \ell$. Tout se passe donc comme si la résultante des actions de Laplace s'appliquait aux deux tiers de la barre. C'est normal car les forces élémentaires de Laplace sont plus intenses loin de l'axe $(O, \vec{u}_z)$. Le point d'application N est donc plus éloigné de l'axe que ne l'est le milieu de la barre.

Chapitre 22

1 Aimant dans un tuyau de cuivre

1. Quand l'aimant tombe vers la spire, le champ magnétique qu'il crée au niveau de la spire varie, ce qui va induire un courant dans la spire. Ce courant, par son sens, est tel que ses effets ont tendance à s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance (loi de modération de Lenz). Pour déterminer ce sens, il suffit d'identifier une des causes et de lui trouver une conséquence la contrariant. Par exemple, la composante verticale du champ créé par l'aimant devient de plus en plus négative. La spire doit donc créer un champ magnétique induit dirigé vers le haut pour contraindre cette variation. D'après la règle de la main droite, on en déduit le sens de i (voir