

EM7.2. Champ magnétique à l'intérieur d'un tore.**Corrigé.****1. Caractéristiques de la distribution et du champ magnétique.**

Le plan contenant le point M et l'axe Oy est un plan de symétrie de la distribution de courants : le champ magnétique en ce point y est perpendiculaire.

D'autre part la distribution est invariante par rotation autour de l'axe Oy .

Ces deux propriétés permettent d'exprimer le vecteur champ magnétique sous la forme :

$$\vec{B}(M) = B_\theta(x, y) \vec{u}_\theta \text{ avec } \vec{u}_\theta \text{ le vecteur unitaire orthoradial de la base cylindro-polaire.}$$

Les lignes de champ de $\vec{B}$ sont des cercles de centre situés sur l'axe Oy contenus dans des plans perpendiculaires à cet axe.

2. Norme du champ magnétique.

Pour déterminer la norme de ce champ magnétique on utilise le théorème d'Ampère en prenant comme contour d'Ampère une ligne de champ passant par le point $M(x, y)$ considéré :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o n I \text{ avec}$$

$$\oint B_\theta(x, y) \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = \mu_o n I \text{ avec } r = x \text{ avec les notations proposées par l'énoncé}$$

Comme le contour choisi est contenu dans un plan $y = \text{cste}$, la composante $B_\theta(x, y)$ du champ est constante, on obtient :

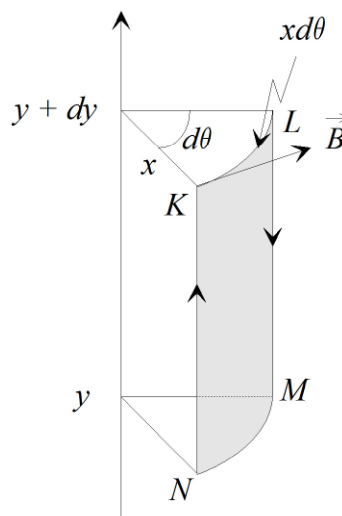
$$xB_\theta(x, y) \oint d\theta = \mu_o n I$$

$$2\pi x B_\theta(x, y) = \mu_o n I$$

$$B_\theta(x, y) = \frac{\mu_o n I}{2\pi x}$$

Ce résultat est vrai quelque soit le contour d'Ampère choisi dans un plan $y = \text{cste}$, on peut donc en déduire que ce champ ne dépend pas de la coordonnée d'espace y .

On peut montrer cela en utilisant un contour d'Ampère élémentaire $KLMN$ compris entre y et $y + dy$ comme l'illustre le schéma suivant :



On applique à nouveau le théorème d'Ampère sur ce contour :

$$\oint_{KLMN} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_\theta(x, y + dy) x d\theta + 0_{LM} - B_\theta(x, y) x d\theta + 0_{NL}$$

$$\oint_{KLMN} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_\theta(x, y + dy) x d\theta - B_\theta(x, y) x d\theta = \frac{\partial B_\theta(x, y)}{\partial y} dy x d\theta$$

Comme le contour considéré n'enlance aucun courant la circulation du champ est nulle, on obtient alors :

$$\frac{\partial B_\theta(x, y)}{\partial y} = 0$$

On constate ainsi que le champ magnétique ne dépend pas de y . Ainsi :

$$\boxed{\vec{B} = B_\theta(x) \vec{u}_\theta = \frac{\mu_o n I}{2\pi x} \vec{u}_\theta}$$

3. Flux du champ magnétique.

Le flux φ du champ magnétique est défini par :

$$\varphi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint B_\theta(x, y) \vec{u}_\theta \cdot dx dy \vec{u}_\theta$$

$$\varphi = \iint \frac{\mu_o n I}{2\pi x} dx dy = \int_{R-\frac{a}{2}}^{R+\frac{a}{2}} \frac{\mu_o n I}{2\pi x} dx \int_0^a dy$$

$$\varphi = \frac{\mu_o n I a}{2\pi} \ln \frac{R + \frac{a}{2}}{R - \frac{a}{2}}$$

$$\boxed{\varphi = \frac{\mu_o n I a}{2\pi} \ln \frac{2R + a}{2R - a}}$$

4. Détermination du rapport a/R .

Champ maximal : $B_{\max} = \frac{\mu_o n I}{2\pi \left(R - \frac{a}{2}\right)} = \frac{\mu_o n I}{\pi(2R - a)}$

Champ minimal : $B_{\min} = \frac{\mu_o n I}{2\pi \left(R + \frac{a}{2}\right)} = \frac{\mu_o n I}{\pi(2R + a)}$

On obtient :

$$2 \frac{B_{\max} - B_{\min}}{B_{\max} + B_{\min}} = 2 \frac{\frac{\mu_o n I}{\pi(2R - a)} - \frac{\mu_o n I}{\pi(2R + a)}}{\frac{\mu_o n I}{\pi(2R - a)} + \frac{\mu_o n I}{\pi(2R + a)}} = 2 \frac{(2R + a) - (2R - a)}{(2R + a) + (2R - a)} = \frac{a}{R}$$

Le rapport demandé est donc égal à :

$$\boxed{\frac{a}{R} = 0,10}$$