

Cycle de Rankine avec surchauffe, détentes de Joule : concours ITPE 2010

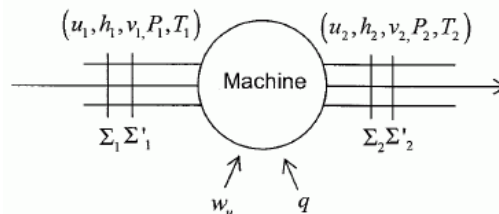
En poursuivant votre navigation sur ce site, vous acceptez l'utilisation de Cookies vous proposant des publicités adaptées à vos centres d'intérêts.

Recherche personnalisée

Rechercher

Écoulements stationnaires.

Une machine (pompe, turbine, détendeur) est traversée par un fluide (liquide ou gaz) en écoulement stationnaire. On note D_m le débit massique de l'écoulement.



On note respectivement u_i , h_i , V_i l'énergie interne massique, l'enthalpie massique, le volume massique du fluide, T_i sa température, P_i sa pression, l'indice i étant égal à 1 en amont et à 2 en aval de la machine.

On note respectivement W_u le travail utile massique et Q le transfert thermique reçus par le fluide dans la machine, par unité de masse.

On considère le système fermé (S) constitué par le fluide compris entre les sections Σ_1 et Σ_2 à la date t et entre les sections Σ'_1 et Σ'_2 à la date $t+dt$.

On note dm_1 la masse de fluide compris à la date t entre les plans Σ_1 et Σ'_1 et dm_2 la masse de fluide compris à la date $t+dt$ entre les plans Σ_2 et Σ'_2 .

Montrer, par un bilan de matière, que ces deux masses sont égales.

On note ρ la masse volumique du fluide, supposée constante.

La quantité de matière traversant le plan Σ'_1 pendant la durée dt était comprise dans le volume $\Sigma'_1 v_1 dt$ avec v_1 vitesse du fluide, indépendante du temps : $dm_1 = \rho \Sigma'_1 v_1 dt$.

La quantité de matière traversant le plan Σ'_2 pendant la durée dt était comprise dans le volume $\Sigma'_2 v_2 dt$ avec v_2 vitesse du fluide, indépendante du temps : $dm_2 = \rho \Sigma'_2 v_2 dt$.

Dans un écoulement stationnaire la conservation du débit volumique s'écrit : $\Sigma'_1 v_1 = \Sigma'_2 v_2$.

Par suite $dm_1 = dm_2 = dm$.

Montrer que le travail des forces de pression s'exerçant entre t et $t+dt$ sur la système fermé (S) s'écrit : $\delta W_p = (P_1 V_1 - P_2 V_2) dm$.

Le travail des forces de pression est nul sur la surface latérales, car ces forces sont perpendiculaires à la vitesse du fluide.

Travail de ces forces sur la section Σ'_1 : $P_1 \Sigma'_1 v_1 dt$ avec $V_1 dm = (\Sigma'_1 v_1 dt)$

Travail de ces forces sur la section Σ'_2 : $-P_2 \Sigma'_2 v_2 dt$ avec $V_2 dm = (\Sigma'_2 v_2 dt)$ (le signe moins est présent car ces forces sont opposées au déplacement).

Par suite : $\delta W_p = (P_1 V_1 - P_2 V_2) dm$.

En appliquant le premier principe au système (S) entre t et $t+dt$, établir la relation : $h_2 - h_1 = W_u + Q$.

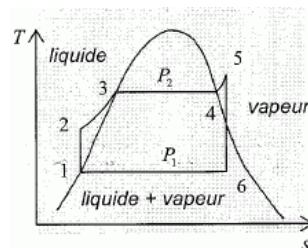
On négligera les variations d'énergie cinétique et potentielle du fluide.

On note V le volume du fluide et W le travail échangé entre le système et l'extérieur.

$dU = \delta W + \delta Q = -PdV + \delta Q$; $dH = dU + d(PV) = -PdV + \delta Q + VdP + PdV$; $dH = VdP + \delta Q = -\delta W_p + dQ$.

Par suite : $h_2 - h_1 = W_u + Q$.

Cycle de Rankine avec surchauffe.



1-2 : compression isentropique dans une pompe.

2-3 ; 3-4 : 4-5 transformations isobares dans une chaudière.

5-6 : détente isentropique dans une turbine à vapeur.

6-1 condensation isotherme dans un condenseur.

$P_1 = 0,2 \text{ bar}$; $P_2 = 40 \text{ bar}$; $T_5 = 540^\circ\text{C}$.

Valeurs thermodynamiques de saturation.

P (bar)	T(°C)	enthalpie massique		entropie massique	
		$h_L \text{ (kJ kg}^{-1}\text{)}$	$h_v \text{ (kJ kg}^{-1}\text{)}$	$S_L \text{ (kJ kg}^{-1}\text{K}^{-1}\text{)}$	$S_v \text{ (kJ kg}^{-1}\text{K}^{-1}\text{)}$
$P_1 = 0,2$	60,6	251,4	2608,9	0,8320	7,9072
$P_2 = 40$	250,4	1087,5	2800,8	2,7968	6,0696

Valeurs thermodynamiques de l'eau vapeur sous 40 bars et à 540°C .

Enthalpie massique : $h = 3537,5 \text{ kJ kg}^{-1}$; entropie massique $S = 7,2075 \text{ kJ kg}^{-1}\text{K}^{-1}$.

Le liquide pouvant être considéré incompressible au niveau de la pompe, **montrer que le travail massique utile fourni par celle-ci s'écrit** : $W_u = (P_2 - P_1) V$.

$$A.N : V = 1,0172 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}.$$

$$\delta \Omega_v = -\delta W_p = (P_1 V_1 - P_2 V_2) \text{ dm} ; V_1 \sim V_2 = V ; \delta W_u = (P_2 - P_1) V \text{ dm} ;$$

$$W_u = (P_2 - P_1) V = (40 \cdot 10^5 - 0,2 \cdot 10^5) \cdot 1,0172 \cdot 10^{-3} = 4049 \sim 4,0 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1}.$$

On définit le titre en vapeur x_v d'un mélange diphasé constitué d'une masse m_v de vapeur et d'une masse m_L de liquide par : $x_v = m_v / (m_v + m_L)$.

Etablir en fonction des données l'expression de x_v dans l'état 6 puis le calculer.

L'entropie est une grandeur extensive : $(1 - x_v) S_L + x_v S_v = S_6 = S_5 = S$ (5-6 : isentropique) ; $x_v = (S - S_L) / (S_v - S_L)$

A la pression P_1 de fin de détente : $x_v = (7,2075 - 0,8320) / (7,9072 - 0,8320) = 0,9011$.

Définir puis calculer le rendement du cycle.

| travail utile | / énergie dépensée soit | Travail lors de la détente dans la turbine | / (énergie mise en jeu dans la chaudière + travail mis en jeu dans la pompe).

La transformation 5-6 étant supposée réversible et isentropie : $W_{\text{détente}} = h_6 - h_5$;

$$h_6 = x_v h_v + (1 - x_v) h_L = 0,9011 \cdot 2608,9 + (1 - 0,9011) \cdot 251,4 = 2375,75 \text{ kJ kg}^{-1}.$$

$$W_{\text{détente}} = 2375,75 - 3537,5 = -1161,7 \text{ kJ kg}^{-1}.$$

énergie mise en jeu dans la chaudière $Q = h_5 - h_2$ avec $W_u = h_2 - h_1$; $h_2 = W_u + h_1 = 4,0 + 251,4 = 255,4 \text{ kJ kg}^{-1}$.

$$Q = h_5 - h_2 = 3537,5 - 255,4 = 3282,1 \text{ kJ kg}^{-1}.$$

$$\text{Rendement} = 1161,7 / (3282,1 + 4,0) = 0,35.$$

Détente de Joule- Gay Lussac.

Décrire un dispositif expérimental permettant de réaliser la détente de Joule-Gay Lussac d'un gaz.

On considère deux réservoirs identiques aux parois rigides et parfaitement calorifugées. Ils communiquent par un tube à robinet. On note $V_0 = 12 \text{ L}$ le volume d'un des réservoirs. A l'état initial le compartiment noté A contient une mole de gaz parfait monoatomique à la température $T_0 = 300 \text{ K}$ et le compartiment B est vide. La pression initiale est notée P_0 .

On ouvre le robinet et le gaz se répartit dans les deux réservoirs et atteint un nouvel équilibre thermodynamique. On note T_{f1} la température finale et P_{f1} la pression finale.

Montrer que cette détente est à énergie interne constante.

La variation de l'énergie interne d'un système fermé est égale à l'énergie échangée avec l'extérieur, sous forme de chaleur et sous forme de travail. $\Delta U = W + Q$.

Système adiabatique : le transfert thermique Q est donc nul.

Système indéformable : le travail des forces de pression W est nul.

en conséquence $\Delta U = 0$; l'énergie interne est constante.

Déterminer le signe de la variation de l'entropie du gaz au cours de cette détente et conclure.

L'entropie est une fonction d'état : sa variation ne dépend que de l'état initial et final.

imaginer une transformation réversible passant de l'état initial à l'état final

transformation élémentaire : $dS = \delta Q / T = (dU - \delta W) / T = -\delta W / T = PdV / T = R dV / V$

intégrer entre T_0 et T_{f1} : $\Delta S_1 = R \ln(V_{f1} / V_0) = R \ln 2 = 5,8 \text{ J K}^{-1}$.

Bilan entropique :

entropie échangée $S_{e1} = Q / T_0 = 0$; entropie créée $S_{c1} = \Delta S_1 - S_{e1} = 5,8 \text{ J K}^{-1}$.

Ce résultat précédent est conforme au second principe de la thermodynamique : la transformation est irréversible, l'entropie créée est positive.

Détente de Joule- Thomson.

Décrire un dispositif expérimental permettant de réaliser la détente de Joule-Thomson d'un gaz.

On fait passer lentement un flux de gaz au travers d'un tampon d'ouate dans une canalisation calorifugée et horizontale ; la pression est différente à gauche et à droite du tampon.

Montrer que cette détente est isenthalpique.

L'enceinte est thermiquement isolée $Q=0$.

Travail de transvasement du gaz de la région 1 (P_1, V_1) à la région 2 (P_2, V_2) : $W = P_1 V_1 - P_2 V_2$.

On considère un système fermé constitué par la surface Σ mobile dans le tube. Entre les instants $t + dt$, la masse dm entre dans Σ et la masse dm sort de Σ .

Variation d'énergie interne entre t et $t + dt$: $\Delta U = U_2 - U_1 = W + Q = W$

$$U_2 - U_1 = P_1 V_1 - P_2 V_2 ; U_2 + P_2 V_2 = U_1 + P_1 V_1 ; H_2 = H_1. \text{ L'enthalpie est constante.}$$

Déterminer le signe de la variation de l'entropie du gaz au cours de cette détente et conclure.

L'entropie est une fonction d'état : sa variation ne dépend que de l'état initial et final.

imaginer une transformation réversible passant de l'état initial à l'état final

transformation élémentaire : $dH = T dS + V dP = 0$; $dS = -V / T dP = -R dP / P$.

intégrer entre P_1 et P_2 : $\Delta S_2 = -R \ln(P_2 / P_1) = R \ln(P_1 / P_2)$; Or $P_1 > P_2$, donc $\Delta S_2 > 0$.

Bilan entropique :

entropie échangée $S_{e1} = Q/T_0 = 0$; entropie créée $S_{c1} = \Delta S_2 - S_{e1} = \Delta S_2$.

Ce résultat précédent est conforme au second principe de la thermodynamique : la transformation est irréversible, l'entropie créée est positive.

Détente de Joule d'un gaz parfait.

Qu'est-ce qui caractérise les détente de Joule-gay Lussac et de Joule Thomson d'un gaz parfait ?

L'énergie interne et l'enthalpie du gaz parfait ne dépendent que de la température.

Dans la détente de Joule-Gay Lussac, l'énergie interne du gaz est constante. Cette détente est isotherme.

Dans la détente de Joule-Thomson, l'enthalpie du gaz est constante. Cette détente est isotherme.

Rappeler les définitions de la capacité calorifique à volume constant C_v et de la capacité calorifique à pression constante C_p d'un corps quelconque.

La capacité thermique (ou calorifique) à volume constant est l'énergie qu'il faut apporter à un corps pour augmenter sa température de un kelvin, le volume restant constant.

La capacité thermique (ou calorifique) à pression constante est l'énergie qu'il faut apporter à un corps pour augmenter sa température de un kelvin, la pression restant constante.

Comment se traduisent ces définitions dans le cas d'un gaz parfait ?

$$C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_v ; C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p$$

En déduire la relation de Mayer pour un gaz parfait.

$$H = U + pV ; dH = dU + d(pV) = dU + d(nRT) = dU + nRdT$$

$$nC_p m dT = nC_v m dT + nRdT \text{ d'où : } C_p m - C_v m = R.$$

Détente de Joule d'un gaz réel.

On considère un gaz réel dont l'équation d'état peut être mise sous la forme $T = f(P, V)$.

On rappelle que si la différentielle d'une fonction $f(x,y)$ de deux variables x et y s'écrit $df = A(x,y) dx + B(x,y) dy$ où $A(x,y)$ et

$B(x,y)$ sont deux fonctions de x et y alors :

$$A(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y ; B(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x ; \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)_x = \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right)_y$$

On considère l'énergie interne $U(P,V)$ et l'entropie $S(T,V)$ du gaz comme fonction des paramètres d'état (T, V) .

Etablir les expressions de leurs différentielles en fonction de C_v , T , P , $\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T$, dT et dV .

$$\begin{aligned} dU &= \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_v dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV = C_v dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV \\ dU &= \delta Q + \delta W \text{ avec } \delta W = -PdV \\ dS &= \frac{\delta Q}{T} = \frac{dU}{T} - \frac{\delta W}{T} = C_v \frac{dT}{T} + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV + \frac{P}{T} dV \end{aligned}$$

Montrer que dU peut se mettre sous la forme : $dU = C_v dT + \left(T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v - P \right) dV$.

Ecrire que dU et dS sont des différentielles exactes.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial C_v}{\partial V} \right)_T &= \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_T = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \text{ et } \left(\frac{\partial C_v}{\partial T} \right)_V = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + \frac{P}{T} \\ &= \frac{1}{T} \left(\frac{\partial C_v}{\partial V} \right)_T = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \right) - \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v - \frac{P}{T^2} \\ &= \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v - \frac{P}{T^2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v - P \end{aligned}$$

On considère l'enthalpie $H(P,V)$ et l'entropie $S(T, P)$ du gaz comme fonction des paramètres d'état (T, P) .

Etablir les expressions de leurs différentielles en fonction de C_p , T , V , $\left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T$, dT et dP .

$$\begin{aligned} dH &= \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T dP = C_p dT + \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T dP \\ dH &= dU + d(PV) = \delta Q + VdP \\ dS &= \frac{\delta Q}{T} = \frac{dH}{T} - \frac{VdP}{T} = C_p \frac{dT}{T} + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T dP - \frac{VdP}{T} \end{aligned}$$

On définit le coefficient de dilatation isobare du gaz par : $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$

Montrer que dH se met sous la forme : $dH = C_p dT + V(1-\alpha T)dP$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial C_p}{\partial P} \right)_T &= \left(\frac{\partial \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T}{\partial T} \right)_P \text{ et } \left(\frac{\partial C_p}{\partial P} \right)_T = \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{T} \left(\left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T - V \right) \right)}{\partial T} \right)_P \\ &= \frac{1}{T} \left(\frac{\partial C_p}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T}{\partial T} \right)_P - \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T - \frac{1}{T} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P + \frac{V}{T^2} \\ &= \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T - \frac{1}{T} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P + \frac{V}{T^2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T = -\alpha VT + V \end{aligned}$$

On fait subir une détente de Joule-Thomson à une mole de gaz de Van der Waals, dont l'équation d'état s'écrit : $(P+a/V^2)(V-b) = RT$ où $a = 0,14 \text{ Pa m}^6$ et $b = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$.

Au cours de cette détente le gaz passe du volume $V_1 = 1,00 \text{ L}$ au volume $V_2 = 10,0 \text{ L}$. On admettra que la capacité calorifique molaire à volume constant du gaz reste constante et égale à celle d'un gaz parfait diatomique.

Déterminer la variation de température du gaz au cours de cette détente.

L'énergie interne reste constante : $dU = 0 = C_{v,m} dT - PdV$.

$$\begin{aligned} 0 &= C_{v,m} dT + \left(T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P \right) dV \\ (V-b)dP &= R dT \Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{R}{V-b} \\ \left(T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P \right) &= P + \frac{a}{V^2} - P = \frac{a}{V^2} \Rightarrow C_{v,m} dT + \frac{a}{V^2} dV = 0 \\ C_{v,m} \Delta T &= -a \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^2} = -a \left[-\frac{1}{V} \right]_{V_1}^{V_2} \Rightarrow \Delta T = \frac{a}{C_{v,m}} \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) \\ \Delta T &= \frac{0,14}{2,5 \cdot 8,31} \left(\frac{1}{10^{-2}} - \frac{1}{10^{-3}} \right) = -6,1 \text{ K.} \end{aligned}$$

Quelle remarque peut-on faire quand on fait tendre a vers zéro ?

La variation de température tend vers zéro si a tend vers zéro.

On fait subir une détente de Joule-Thomson à une mole de gaz de Clausius, dont l'équation d'état s'écrit : $P(V-b) = RT$ où $b = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$.

Au cours de cette détente le gaz passe de la pression $P_1 = 2,00 \text{ bar}$ à la pression $P_2 = 1,00 \text{ bar}$. On admettra que la capacité calorifique molaire à pression constante du gaz reste constante et égale à celle d'un gaz parfait diatomique.

Déterminer la variation de température du gaz au cours de cette détente.

L'enthalpie reste constante : $dH = 0 = C_{p,m} dT + VdP$.

$$\begin{aligned} 0 &= C_{p,m} dT + V \left(1 - \frac{T}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \right) dP \\ PdV &= R dT \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{R}{P} \text{ et } 1 - \frac{T}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = 1 - \frac{RT}{VP} = 1 - 1 + \frac{b}{V} \\ C_{p,m} dT + b dP &= 0 \Rightarrow C_{p,m} \Delta T + b(P_2 - P_1) = 0 \\ \Delta T &= \frac{b(P_1 - P_2)}{C_{p,m}} = \frac{3,2 \cdot 10^{-5}}{3,5 \cdot 8,31} (2-1) 10^5 = 0,11 \text{ K.} \end{aligned}$$

Quelle remarque peut-on faire quand on fait tendre b vers zéro ?

La variation de température tend vers zéro si b tend vers zéro.

[menu](#)