

Exercice 30 : Altitude plafond d'un ballon sonde

On considère le modèle de l'atmosphère isotherme à la température $t_0 = 20^\circ\text{C}$, pour lequel la pression P à l'altitude z est donnée par la relation $P(z) = P_0 \exp(-z/H)$, où $P_0 = 1,00\text{bar}$ est la pression au niveau du sol et $H = 8,6\text{km}$. Un ballon sonde est constitué d'une enveloppe en aluminium, de volume fixe $V = 3L$, de masse $m = 2,00\text{g}$, gonflée avec de l'hélium à la pression $P_{\text{He}} = 1\text{bar}$. Données : $M_{\text{air}} = 29\text{g.mol}^{-1}$ et $M_{\text{He}} = 4\text{g.mol}^{-1}$

1. Calculer la masse d'hélium m_{He} contenu dans le ballon.
2. Déterminer l'expression puis calculer la pression P_1 de l'air à l'altitude à laquelle le ballon-sonde va se stabiliser.
3. En déduire l'altitude plafond z_1 atteinte par le ballon-sonde.

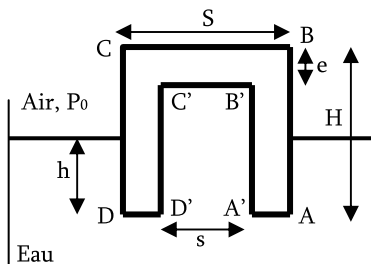
Statique des Fluides – Calcul Forces de Pression

Exercice 31 : Etude d'un corps flottant

Soit un verre ABCD de forme cylindrique, de masse m à vide, de hauteur intérieure H et de sections intérieure s et extérieure S . On remplit complètement ce verre avec de l'eau, puis on ferme avec la main la surface libre AD pour le retourner sur une cuve à eau en l'enfonçant d'une hauteur h .

Quelle est la force appliquée par l'opérateur pour le maintenir à l'équilibre ?

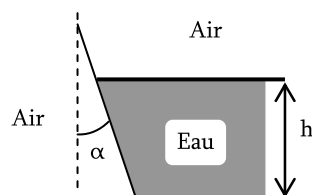
- Faire le calcul par un bilan des forces pressantes
- Faire le calcul avec le théorème d'Archimède



Exercice 32 : Pression sur la paroi d'une piscine

La paroi d'une piscine (en kit, hors sol), est schématisée ci-contre. L'angle α vaut 30° . La hauteur d'eau est de $h = 2\text{m}$. La pression atmosphérique locale est $P_0 = 1\text{bar}$. On donne $\rho_{\text{eau}} = 1\text{kg.L}^{-1}$ et $g = 9,80\text{m.s}^{-2}$.

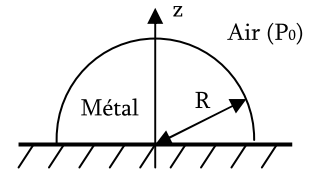
- Calculer la résultante des forces de pression s'exerçant sur cette paroi, de longueur $L = 5\text{m}$.



Exercice 33 : Pression sur une demi boule

a) Calcul direct

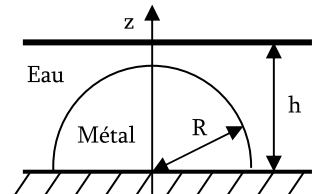
Soit une demi boule métallique de rayon $R = 1\text{m}$, posée sur un sol plat et baignant dans l'air.



- Calculer la force pressante résultante de l'air atmosphérique sur cette demi-boule, après avoir précisé sa direction et son sens.

b) Par le théorème d'Archimède

La même demi boule est maintenant immergée au fond d'une piscine, toujours sur un sol plat.

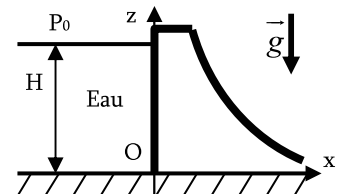


1. Peut-on utiliser un calcul direct pour obtenir la résultante des forces de pressions ? Et est-ce commode ?
2. Pourquoi, pour appliquer le théorème d'Archimède, faut-il supposer qu'il existe un filet d'eau entre la demi-boule et le fond ?
3. Quelle est la poussée d'Archimède exercée sur la demi-boule ? En déduire la force pressante résultante sur la paroi demi-sphérique.

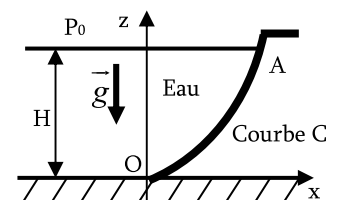
Exercice 34 : Force sur un barrage

Un barrage droit permet de réaliser une retenue d'eau sur une profondeur H et une largeur L . La pression de l'air est P_0 , et la masse volumique de l'eau est constante et vaut ρ_0 .

1. Exprimer la loi donnant la pression P qui règne dans l'eau selon la hauteur z .
2. Déterminer la résultante $\vec{F}_{\text{eau}}$ des efforts de pression qu'exerce l'eau sur le barrage en fonction de ρ , g , L et H et P_0 .
3. Déterminer le centre de poussée C
4. Le profil du barrage est modifié. Il correspond à une courbe C d'équation $z = f(x)$. La hauteur d'eau demeure H et la largeur L . On notera x_0 l'abscisse du point le plus haut de la courbe C atteint par l'eau. Donner la nouvelle expression des composantes de $\vec{F}_{\text{eau}}$ par un calcul direct.



5. Application à un profil parabolique $z = \frac{x^2}{h}$.
6. Commenter les valeurs obtenues pour la composante suivant x de $\vec{F}_{\text{eau}}$ dans les deux cas.
7. Ne voyez-vous pas une méthode rapide pour calculer la valeur de la composante suivant x de la force de pression avec un profil quelconque inconnu ? (pensez à isoler une partie de fluide adaptée)



Pour une fonction de plusieurs variables : (voir cours de math)

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right)_z dr + \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)_r dz = \rho \omega^2 r \cdot dr - \rho g \cdot dz$$

Cette expression s'écrit : $dP = d\left(\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g z\right)$ et s'intègre :

$$P(r, z) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g z + C_{\text{ste}}$$

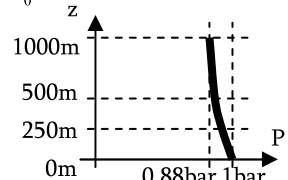
Ainsi, sur la surface libre : $P(r, z) = P_0 = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g z + C_{\text{ste}}$

Et la constante : $C_{\text{ste}} = P_0 - \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + \rho g z = P_0 + \rho g z_{\min}$

Ainsi : $\forall \theta, z(r) = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + z_{\min} \rightarrow$ Paraboloïde de révolution

Statique des Fluides – Fluide Compressible

Exercice 26 : Modèle idéal de l'atmosphère isotherme

- Voir TD : $\frac{dP(z)}{dz} = -\rho(z)g = -\frac{MP}{RT_0}g$ et $P = P_0 \cdot e^{-\frac{Mgz}{RT_0}}$
- AN : $\begin{cases} P_{(z=250m)} = 0,97 \text{ bar} \\ P_{(z=500m)} = 0,94 \text{ bar} \\ P_{(z=250m)} = 0,89 \text{ bar} \end{cases}$ 

Exercice 27 : Modèle plus réaliste pour la troposphère

- On a $\frac{dP(z)}{dz} = -\frac{MP}{RT}g \Rightarrow \frac{R}{Mg} \cdot \frac{dP(z)}{P} = -\frac{dz}{T_0 + Az}$
On intègre : $P = P_0 \left(1 + \frac{A}{T_0}z\right)^{-\frac{Mg}{AR}}$
- AN : A z=11km, $P_1 = 0,226 \text{ bar}$ et $T_1 = 216K = -57^\circ C$

Exercice 28 : Double vitrage

$\rightarrow$ Atmosphère isotherme $P = P_0 \cdot e^{-\frac{Mgz}{RT_0}} \rightarrow h_{\max} = 843m.$

Exercice 29 : Atmosphère de température variable

- Démonstration de $dP = -\rho(z)g_0 dz$... Voir Cours...
- A en K, est la température T_0 au sol ($z = 0$), et z_0 en m.
- On donne $A = T_0 = 273K$ et $dT/dz = -A/z_0 \rightarrow z_0 = 36,4km.$
- Pression $P(z) = P_0 \exp\left[-\frac{Mg_0}{RT_0}\left(\frac{z^2}{2z_0} + z\right)\right]$
- AN sur l'Everest : $P = 0,29bar.$

Exercice 30 : Altitude plafond d'un ballon sonde

- Masse d'hélium : $m_{He} = 0,5g.$
- Stabilisation : $P_1 = \frac{RT_0}{M_{air}} \left(\frac{m + m_{He}}{V}\right) = 0,70 \text{ bar}$
- Plafond : $z_1 = 3km$

Statique des Fluides – Calcul Forces de Pression

Exercice 31 : Etude d'un corps flottant

Bilan des forces : les F horizontales s'annulent, et à la verticale :
 $F_{op} - Mg - P_0 S + (S-s)(P_0 + \rho gh) + s(P_0 - \rho g(H-h-e)) = 0$

$$\vec{F}_{op} = [Mg + \rho g(s(H-e) - Sh)] \cdot \vec{e}_z$$

Avec Archimède : $\vec{\Pi} = +\rho Shg \cdot \vec{e}_z$, mais attention au solide qui déplace l'eau (on doit isoler le verre plus l'eau qu'il contient), donc le poids du système est $\vec{P} = -(M + \rho s(H-e))g \cdot \vec{e}_z$

$$\text{PFS... } \vec{F}_{op} = [Mg + \rho g(s(H-e) - Sh)] \cdot \vec{e}_z$$

Remarque : La pression de l'air a été supposée constante, ce qui équivaut à dire que la poussée d'Archimède due à l'air est nulle.

Exercice 32 : Pression sur la paroi d'une piscine

On découpe la paroi en surface élémentaire dS horizontale :
 $dS = L \cdot dl = L \cdot \frac{dz}{\cos \alpha}$ et on intègre pour z variant de 0 à h .

Chaque surface est soumise à la pression de l'air P_0 et à celle de l'eau $P_0 + \rho g z$ en sens opposé. Ainsi :
 $d\vec{F} = [(P_0 + \rho g z) - P_0] \cdot d\vec{S}$ (dS orienté de l'eau vers l'extérieur)

$$\text{Ainsi : } \vec{F} = \int_0^h \rho g z \cdot d\vec{S} = \int_0^h \rho g z \cdot L \cdot \frac{dz}{\cos \alpha} \cdot \vec{n} = \frac{\rho g L h^2}{2 \cos \alpha} \cdot \vec{n} = 1,1 \cdot 10^5 N$$

Exercice 33 : Pression sur une demi boule

a) Calcul direct

$\rightarrow$ Pression de l'air : verticale vers le bas, on intègre seulement sur cette direction :

$$F_z = \iint_S (-P_0 dS \cdot \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_z = -P_0 \iint_S dS \cdot \sin \theta$$

$$\text{Et en projection : } F_z = -P_0 \iint_S dS' = -P_0 \Sigma \Rightarrow \vec{F} = -P_0 \pi R^2 \cdot \vec{e}_z$$

Où Σ est la surface de la boule au sol, car on remarque que $dS \cdot \sin \theta$ est la projection dS' de dS sur le sol. AN : $F_z = -3,1 \cdot 10^5 N$

b) Par le théorème d'Archimède

- Calcul direct tout à fait possible, mais plus complexe.
- Pour le théorème d'Archimède, le solide doit être immergé.
- La poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = +\rho g \left(\frac{2}{3}\pi R^3\right) \cdot \vec{e}_z$ traduit le

bilan de toutes les forces pressantes : F_1 sur la partie sphérique, et F_2 (facile à obtenir) sur le plat : $\vec{\Pi} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

$$\text{Ainsi, } \vec{F}_1 = \vec{\Pi} - \vec{F}_2 = \left[\rho g \left(\frac{2}{3}\pi R^3\right) - (P_0 + \rho gh)\pi R^2\right] \cdot \vec{e}_z = (-3,6 \cdot 10^5 N)$$

Exercice 34 : Force sur un barrage

- $\vec{F}_{eau} = \int_{z=-H}^0 (P_0 - \rho g z) L dz \cdot \vec{e}_x = LH \left[P_0 + \rho g \frac{H}{2}\right] \cdot \vec{e}_x$
- On identifie les moments, qui doit s'appliquer en C :
 $\vec{M}_{O(\vec{F})} = \iint_S d\vec{M}_{O(\vec{F})} = \iint_S \vec{OM} \wedge d\vec{F} = \iint_S -z(P_0 - \rho g z) L dz \cdot \vec{e}_y = \dots$
 $\vec{M}_{O(\vec{F})} = \vec{OC} \wedge \vec{F} = -z_C \cdot LH \left[P_0 + \rho g \frac{H}{2}\right] \cdot \vec{e}_y \Rightarrow z_C = \frac{H}{2} \cdot \frac{P_0 + \rho g \frac{H}{3}}{P_0 + \rho g \frac{H}{2}} < \frac{H}{2}$
- Profil du barrage modifié... même composante suivant x.
- Possibilité d'isoler partie de fluide avec un bord droit à gauche, et la paroi du barrage à droite $\rightarrow$ Calcul simplifié.