

Cycles moteurs de Carnot, Beau de Rochas et Stirling

Après une étude graphique des machines ditthermes, à l'aide du diagramme de Raveau, et une vérification expérimentale de l'expression de l'entropie d'un gaz parfait, on compare les efficacités des cycles moteurs de Carnot, Beau de Rochas et Stirling. Ce dernier cycle présente des caractéristiques intéressantes, notamment un faible niveau de pollution, une durée de vie élevée et une excellente efficacité.

$$R = 8,3 \quad J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$$

1. Machine dittherme

Une masse m de gaz, constituée principalement d'air, subit un cycle moteur entre deux sources thermiques, l'une la source froide à la température $T_f = 290 \text{ K}$, l'autre la source chaude à la température $T_c = 1450 \text{ K}$.

- a) Exprimer les bilans d'énergie et d'entropie au cours d'un cycle réel. On introduira les quantités algébriques suivantes, relatives à un cycle : W , Q_f , Q_c , S^p ; W est le travail reçu (algébriquement) par le fluide (si $W > 0$, il est effectivement reçu par le fluide, si $W < 0$, il est effectivement fourni par le fluide). De même Q_f est la chaleur reçue par le fluide de la part de la source froide ; Q_c est la chaleur reçue par le fluide de la part de la source chaude.

Dans l'écriture de S^p , qui désigne l'entropie produite, p est un indice et non un exposant

- b) Représenter, sur un même graphe, donnant Q_c en fonction de Q_f , appelé diagramme de Raveau, les deux équations précédentes. W et S^p étant des quantités déterminées. En déduire la position du point de fonctionnement sur le diagramme, compte tenu des signes de W et S^p , ainsi que le sens des échanges thermiques (signes de Q_c et Q_f)

- c) Etablir l'expression de l'efficacité η du moteur, appelée aussi rendement, en fonction de T_c , T_f , Q_c et S^p .

- d) Que devient cette efficacité lorsque la machine dittherme fonctionne selon un cycle de Carnot ? Calculer sa valeur η_c . Ce résultat, sensiblement inférieur à 1, doit-il être attribué à une imperfection de la machine (frottements divers) ou provient-il d'une limitation fondamentale ? Dans ce dernier cas, préciser la nature de cette limitation

- e) On définit le degré d'irréversibilité du cycle à l'aide du rapport $r = \eta/\eta_c$. Sachant que $r = 0,94$ et que le moteur fournit un travail de 15 kJ par cycle, trouver Q_c , Q_f et S^p . Porter avec soin ces résultats sur un graphe, donnant Q_c en fonction de Q_f , dans lequel 1 cm représente 5 kJ .

2. Entropie d'un gaz parfait

- a) Le rapport γ , des capacités thermiques isobare et isochore d'un gaz parfait est 1,67 pour un gaz monoatomique, tel que l'argon, et 1,4 pour un gaz diatomique, tel que l'air. Justifier ces valeurs à l'aide de considérations simples issues de la théorie cinétique des gaz ?

- b) Etablir l'expression de la variation élémentaire de l'entropie d'un gaz parfait monoatomique en fonction de sa température T et de sa pression p . Montrer que l'entropie du gaz peut s'écrire

$$S = \alpha(-\ln p + \beta \ln T + \text{Cte})$$

α étant un coefficient que l'on exprimera, en fonction du nombre n de moles et de la constante R des gaz parfaits, et β un facteur que l'on déterminera. La constante Cte qui apparaît dans la formule précédente a pu être déterminée expérimentalement à l'aide du graphe $C_p(T)$ donnant la capacité thermique molaire de l'argon gazeux, sous 1 bar, en fonction de la température. Comment accède-t-on à l'entropie à partir de $C_p(T)$?

- c) Dans le cas d'un gaz parfait diatomique, $\beta = 7/2$. En déduire la relation entre la pression et la température d'un gaz parfait diatomique au cours d'une évolution isentropique.

3. Cycle de Beau de Rochas et Otto

Dans un moteur à explosion, le fluide, de masse $m = 2,9 \text{ g}$, assimilé à un gaz parfait diatomique, de masse molaire $M = 29 \text{ g}$, suit une évolution cyclique réversible ABCD, constituée de deux portions isentropiques, AB et CD, séparées par deux portions isochores, BC et DA. Le cycle n'est plus dittherme : il y a mise en contact du fluide avec une succession de sources chaudes et froides. Les températures et les pressions aux points A et C sont, respectivement :

$$T_A = 290 \text{ K} \quad p_A = 1 \text{ bar} \quad T_C = 1450 \text{ K} \quad p_C = 40 \text{ bar}$$

En outre, le taux de compression $\alpha_v = V_A/V_C$ est égal à 8.

- a) Quelle équation relie la pression et le volume le long des courbes AB et CD ? Calculer les pressions, en bar, p_B et p_D , en B et D respectivement, ainsi que les volumes en litre en ces points.

- b) Représenter avec soin le cycle ABCD dans le diagramme de Clapeyron (p, V). Justifier le sens de description du cycle

- c) Calculer, en kJ, le travail et la chaleur reçus (algébriquement) par le gaz sur chaque portion du cycle. Vérifier l'existence d'une relation simple entre toutes les grandeurs calculées.

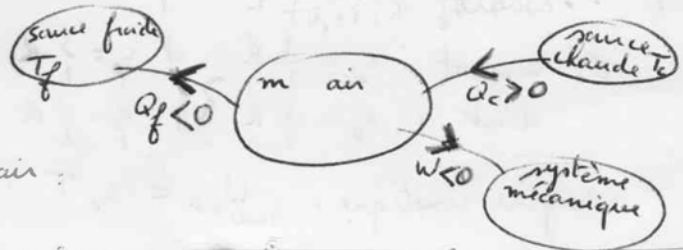
- d) Quelle est l'efficacité η_{BO} de ce cycle moteur, c'est-à-dire le rapport du travail fourni au milieu extérieur sur la chaleur reçue de la part des sources chaudes représentées sur la portion BC du diagramme ? Comparer η_{BO} à l'efficacité η_c d'un cycle moteur dittherme fonctionnant entre les températures T_A et T_C . Commenter.

4. Cycle de Stirling

Dans un cycle de Stirling, une même masse d'air ($m = 2,9 \text{ g}$) suit une évolution cyclique réversible $A'B'C'D'$, constituée de deux portions isothermes $A'B'$ et $C'D'$ séparées par deux portions isochores $B'C'$ et $D'A'$. Les températures et les pressions aux points A' et C' sont les mêmes qu'aux points A et C respectivement. Le taux de compression $\alpha_r = V_A/V_C$ est aussi le même que précédemment.

- Quelle équation relie la pression et le volume le long des courbes $A'B'$ et $C'D'$? En déduire les pressions $p_{B'}$ et $p_{D'}$ en B' et D' , respectivement.
- Représenter avec soin le cycle $A'B'C'D'$ dans le diagramme de Clapeyron. Comparer ce diagramme au précédent.
- Calculer le travail et la chaleur reçus (algébriquement) par le gaz sur chaque portion du cycle.
- Les échanges thermiques au cours des évolutions isochores se font à l'aide d'un régénérateur interne à la machine. Les seuls échanges thermiques avec l'extérieur ont lieu pendant les phases isothermes. Quelle est l'efficacité η_S de ce cycle moteur, c'est-à-dire le rapport du travail fourni au milieu extérieur sur la chaleur reçue de la part des sources chaudes représentées sur la portion $C'D'$ du diagramme ? Comparer η_S à η_{BO} et η_C .

1) a) les sens de flèche correspondent à des termes positifs.



1^{er} principe (simplifié) pour un cycle de l'air :

$$\Delta U = W + Q_f + Q_c = 0$$

2^e principe pour le fluide pendant un cycle :

$$\Delta S_{\text{cycle}} = S_{\text{échange}} + S^P$$

$$0 = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} + S^P$$

≥ 0 irréversibilité

nul si réversible

d'où
$$-\frac{Q_c}{T_c} - \frac{Q_f}{T_f} \geq 0$$

ou
$$-\frac{Q_c}{T_c} - \frac{Q_f}{T_f} = S^P$$

Résumé :

$$W + Q_f + Q_c = 0 \quad (1)$$

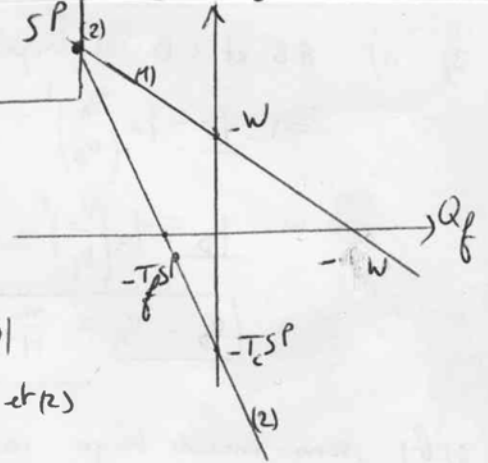
$$-\frac{Q_f}{T_f} - \frac{Q_c}{T_c} = S^P \quad (2)$$

1) b) cycle moteur $\Rightarrow W < 0 \quad Q_c > 0 \quad Q_f < 0$

(1) $Q_c = -Q_f - W$

(2) $Q_c = -\frac{T_c}{T_f} Q_f - T_c S^P$ ($T_c > T_f$)
|pente(2)| > |pente(1)|

le point de fonctionnement = intersection des droites (1) et (2)
dans le quadrant $Q_f < 0 \quad Q_c > 0$



1) c) $\eta = \frac{|W|}{Q_c} \stackrel{(1)}{=} \frac{Q_f + Q_c}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} \stackrel{(2)}{=} 1 - \frac{T_f}{T_c} - \frac{T_f S^P}{Q_c}$

1) d) Cycle de Carnot réversible $\hookrightarrow S^P = 0$: $\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 1 - \frac{290}{1450} = 0,80$

Il s'agit d'une limitation fondamentale (cf (1)) $|W| = Q_f + Q_c < Q_c$ car $Q_f < 0$
l'énergie apportée par la source chaude sert au travail mécanique à fournir
mais aussi est perdue partiellement en réchauffant (inutilement) la source froide

1) e) $\eta = \eta_c = 0,94 \times 0,80 = 0,752 \Rightarrow \frac{Q_c}{\eta} = \frac{|W|}{0,752} = \frac{15}{0,752} = 19,9 \text{ kJ/cycle}$

(1) $\rightarrow Q_f = -Q_c - W = -19,9 + 15 = -4,9 \text{ kJ/cycle}$

(2) $\rightarrow S^P = -\frac{Q_f}{T_f} - \frac{Q_c}{T_c} = \frac{4,9 \cdot 10^3}{290} - \frac{19,9 \cdot 10^3}{1450} = 3,2 \text{ J.K}^{-1}/\text{cycle}$

$-T_f S^P = -0,18 \text{ cm}$

$-T_c S^P = -0,9 \text{ cm}$

$-W = 15 \text{ kJ}$

Q_f

2/a) $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ GP: $c_p - c_v = R \Rightarrow c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$ $c_v = \frac{R}{\gamma - 1}$

GP monoat: $c_v = \frac{3}{2} R$ et $c_p = \frac{5}{2} R \Rightarrow \gamma = \frac{5}{3} = 1,67$

diat: $c_v = \frac{5}{2} R$ $c_p = \frac{7}{2} R$ $\gamma = \frac{7}{5} = 1,4$

Origine cinétique: $U_{GP} = c_v T$ ou $U_{GP} = E_{micro} = \begin{cases} \frac{3}{2} RT & \text{monoat} \\ \frac{5}{2} RT & \text{diat} \end{cases}$

car th. répartition énergie: $\frac{1}{2} RT$ / degré liberté avec 3 degrés transl monoat
3 degrés transl + 2 rot diat

2/b) $dS = \frac{dH - Vdf}{T}$; $dH = n c_p dT \Rightarrow \frac{dS}{GP} = \frac{n c_p dT - n R df}{T} = n c_p \frac{dT}{T} - n R \frac{df}{f}$

(2^e identité thermodynamique)

$\Rightarrow S = n c_p \ln T - n R \ln f + cte$ ou $S = \alpha (-\ln f + \beta \ln T + cte)$ avec $\alpha = nR$
 $\beta = \frac{c_p}{R} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$

$S(T, f) = S(T_0, f) + \int_{T_0}^T n c_p \frac{dT}{T}$

2/c) isentropique GP $\Rightarrow S = \text{constante} \Rightarrow -\ln f + \beta \ln T = cte \Rightarrow \frac{T^\beta}{f} = cte$

3) a) AB et CD isentropiques $\frac{T^\beta}{f} = cte$ ou $f V^\gamma = cte$

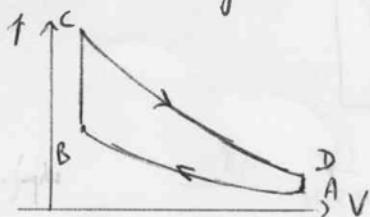
$\Rightarrow p_D = p_A \left(\frac{V_A}{V_D} \right)^\gamma = p_A \left(\frac{V_A}{V_C} \right)^\gamma = p_A \alpha^\gamma = 1 \times 8^{1,4} = 18,4 \text{ bar}$

de m $p_D = p_C \left(\frac{V_C}{V_D} \right)^\gamma = p_C \left(\frac{V_C}{V_A} \right)^\gamma = p_C \alpha^{-\gamma} = 40 \times 8^{-1,4} = 2,2 \text{ bar}$

$V_D = V_A = \frac{m}{\pi} \frac{R T_A}{p_A} = \frac{2,9 \times 8,3 \times 290}{29 \times 10^5} = 2,41 \text{ L}$

$V_B = V_C = \frac{V_A}{\alpha} = \frac{2,41}{8} = 0,30 \text{ L}$

3/b) sens inverse trigo car cycle moteur $W = \int -p dV$ doit être négatif



3/c) AD isentropique: $\Delta S_{AB} = 0$ $\begin{cases} Q_{AB} = 0 \\ Q_{CD} = 0 \end{cases}$ $W_{AB} = \Delta U_{AB} = \frac{m}{\pi} \frac{R}{\gamma - 1} (T_B - T_A) = \frac{p_B V_B - p_A V_A}{\gamma - 1} = 0,78 \text{ kJ}$

CD: $W_{CD} = \Delta U_{CD} = \frac{p_D V_D - p_C V_C}{\gamma - 1} = -1,67 \text{ kJ}$

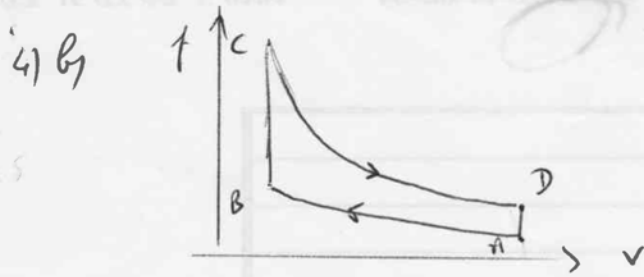
BC et DA isochores $\Rightarrow W_{BC} = W_{DA} = 0$ $Q_{BC} = \frac{m}{\pi} \frac{R}{\gamma - 1} (T_C - T_B) = \Delta U_{BC} = \frac{p_C V_C - p_B V_B}{\gamma - 1} = 1,62 \text{ kJ}$

isochore $Q_{DA} = \Delta U_{DA} = \frac{p_A V_A - p_D V_D}{\gamma - 1} = -0,72 \text{ kJ}$

on retrouve bien pour le cycle complet $\Sigma W + \Sigma Q = 0$

3/d) $\eta_{Bo} = \frac{-W_{total}}{Q_{BC}} = \frac{-(0,78 - 1,67)}{1,62} = 0,55 < \eta_{carnot}$ - efficace

4) a) A'B' isotherme $\Rightarrow$ $\begin{cases} p_{B'} V_{B'} = p_{A'} V_{A'} \\ p_{D'} V_{D'} = p_{C'} V_{C'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{B'} = p_{A'} \frac{V_{A'}}{V_{B'}} = p_A \frac{V_A}{V} = 1 \times 8 = 8 \text{ bar} \\ p_{D'} = p_{C'} \frac{V_{C'}}{V_{D'}} = \frac{40}{8} = 5 \text{ bar} \end{cases} \quad (3)$



4) c) isotherm: $\overline{W_{A'B'}} = \int -p dV = \int -\frac{nRT}{V} dV = -\frac{nRT}{n} \ln \frac{V_{B'}}{V_{A'}} = -\frac{nRT}{n} \ln \frac{V_C}{V_A}$

$$\overline{W_{A'B'}} = -\frac{29}{29} \times 8,3 \times 290 \ln \frac{1}{8} = 0,5 \text{ kJ} \quad \overline{Q_{A'B'}} = -\overline{W_{A'B'}} = -0,5 \text{ kJ}$$

diatherm: $\overline{W_{C'D'}} = -\frac{nRT_C}{n} \ln \frac{V_D}{V_C} = -\frac{nRT_C}{n} \ln \frac{V_A}{V_C} = -\frac{nRT_C}{n} \ln \alpha = -\frac{29}{29} \times 8,31 \times 1550 \ln 8$

$$= -2,5 \text{ kJ} \quad \overline{Q_{C'D'}} = -\overline{W_{C'D'}} = 2,5 \text{ kJ}$$

isov: $\overline{W_{B'C'}} = \overline{W_{D'A'}} = 0$

$$\overline{W_{B'A'}} = 0$$

$$\overline{Q_{B'C'}} = \Delta U_{B'C'} = \frac{p_C V_C - p_B V_B}{\gamma - 1} = 2,41 \text{ kJ}$$

$$\overline{Q_{D'A'}} = \Delta U_{D'A'} = \frac{p_A V_A - p_D V_D}{\gamma - 1} = -2,41 \text{ kJ}$$

4) d) $\eta_s = \frac{|W|}{Q_{C'D'}} = \frac{|0,5 - 2,5|}{2,5} = 0,8 = \eta_{\text{Carnot}} > \eta_{00}$