

Chapitre 0

Rappel et complément d'électrostatique et de magnétostatique

I Rappel d'électrostatique

I.1 Source de champ électrique

La source d'un champ électrique $\vec{E}(M, t)$ en un point M de l'espace et à un instant t est une charge ou un ensemble de charges électriques. En régime statique (*i.e.* stationnaire) ces charges sont fixes et on parle alors d'électrostatique.

Une distribution volumique $\mathcal{V}$ de charges de densité $\rho = dq/d\mathcal{V}$ (en $C.m^{-3}$) contient une charge totale :

$$Q = \iiint_{\mathcal{V}} dq = \iiint_{\mathcal{V}} \rho.d\mathcal{V}$$

Une distribution surfacique $\mathcal{S}$ de charges de densité $\sigma = dq/d\mathcal{S}$ (en $C.m^{-2}$) contient une charge totale :

$$Q = \iint_{\mathcal{S}} dq = \iint_{\mathcal{S}} \sigma.d\mathcal{S}$$

Une distribution linéique $\mathcal{C}$ de charges de densité $\lambda = dq/dl$ (en $C.m^{-1}$) contient une charge totale :

$$Q = \int_{\mathcal{C}} dq = \int_{\mathcal{C}} \lambda.dl$$

I.2 Loi de Coulomb

Une charge ponctuelle q fixe située en un point P de l'espace crée en tout autre point M le champ électrique $\vec{E}(M)$ donné par la loi de Coulomb suivante :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

où ϵ_0 (en Fm^{-1}) désigne la permittivité électrique du vide.

Une distribution discrète de charges fixes ponctuelles q_i situées aux points P_i créent en tout autre point M de l'espace le champ électrique suivant obtenu par *théorème de superposition* :

$$\vec{E}(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{P_i M}}{P_i M^3}$$

Une distribution continue de charges fixes situées aux points P de l'espace crée en tout autre point M le champ suivant obtenu par théorème de superposition :

- Si la distribution est volumique de densité ρ :

$$\vec{E}(M) = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} d\mathcal{V}$$

- Si la distribution est surfacique de densité σ :

$$\vec{E}(M) = \iint_S \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} = \iint_S \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} dS$$

- Si la distribution est linéique de densité λ :

$$\vec{E}(M) = \int_C \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} = \int_C \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} dl$$

I.3 Théorème de Gauss

Énoncé :

Le flux $\Phi_E(\Sigma_G)$ du champ électrique $\vec{E}(M)$ à travers une surface fermée Σ_G , dite surface de Gauss, est égal à la quantité de charges Q_{int} contenue à l'intérieur de cette surface divisée par ϵ_0 :

$$\Phi_E(\Sigma_G) \underset{(def)}{=} \iint_{M \in \Sigma_G} \vec{E}(M) \cdot \vec{\Sigma}_G(M) = \frac{Q_{int}(\Sigma_G)}{\epsilon_0} \quad (1.1)$$

Exemple :

On se propose d'appliquer le théorème de Gauss (1.1) pour le calcul du champ électrique $\vec{E}(M)$ créé en tout point M de l'espace. La distribution de charges est représentée par la figure 1.1 ci-contre : une charge ponctuelle Q au centre O de deux sphères concentriques, de rayons respectifs R_1 et R_2 . L'espace entre les deux sphères est à son tour rempli de charges réparties en volume avec la densité uniforme ρ

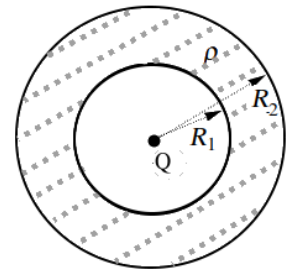


Figure 1.1

i) Choix de la base : Le problème est à symétrie sphérique d'où on choisit de travailler en coordonnées sphériques (r, θ, φ) dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$.

ii) Étude d'invariances et de symétries :

Étude d'invariances :

La distribution de charges reste invariante par rotation d'un angle θ ou d'un angle φ (*i.e.* par changement de θ ou de φ) d'où, d'après le principe de Curie (*i.e.* principe de *causalité*) le champ $\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, \varphi)$ ne dépend ni de θ ni de $\varphi \rightarrow \vec{E}(M) = \vec{E}(r)$.

Étude de symétries :

Les plans $\Pi_1 = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $\Pi_2 = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ sont deux plans de symétrie géométrique. De plus, de part et d'autre de chacun de ces plans, on a même signe de charge (car ρ est uniforme), d'où il s'agit de deux plans de symétrie paire, et -par conséquent- $\vec{E}(M) \in \Pi_1$ et $\vec{E}(M) \in \Pi_2$ donc $\vec{E}(M) \in \Pi_1 \cap \Pi_2$. Il s'en suit alors que $\vec{E}(M) = E(M)\vec{e}_r$.

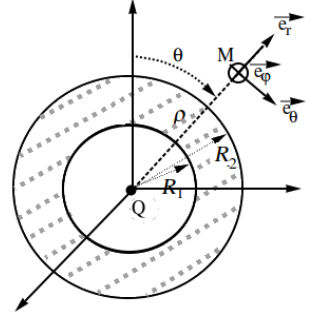


Figure 1.2

Finalement, par symétries et invariances, on a : $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$.¹

iii) Calcul :

* La première étape s'agit toujours d'exprimer le flux Φ_E du champ électrique $\vec{E}(M)$ à travers une surface fermée de centre O et de rayon r .² :

$$\begin{aligned}
 \Phi_E &= \iint_{M \in \Sigma_G} \vec{E}(M) \cdot d\vec{\Sigma}_G(M) \\
 &= \iint_{M \in \Sigma_G} E(M)\vec{e}_r \cdot d\Sigma_G(M)\vec{e}_r \\
 &= \iint_{M \in \Sigma_G} E(r) \cdot r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \\
 &= 4\pi r^2 E(r)
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Où $d\Sigma_G(M) = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ avec $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$

* La deuxième étape consiste à exprimer la quantité de charges contenues à l'intérieur de la surface de Gauss Σ_G de rayon r . Il s'agit alors ici de discuter suivant que $r \leq R_1$, $R_1 \leq r \leq R_2$ ou bien $r \geq R_2$.

1. On dit dans ce cas que la distribution est à haute symétrie.

2. Le rayon de la surface de Gauss est toujours égal à r car elle doit impérativement passer par le point M où on cherche à calculer $\vec{E}(M)$

Si $0 < r \leq R_1$: (figure 1.3)

$$Q_{int}(\Sigma_G) = Q \quad (1.3)$$

d'où (1.2) et (1.3) permettent d'écrire :

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

soit alors :

$$\vec{E}(r \leq R_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

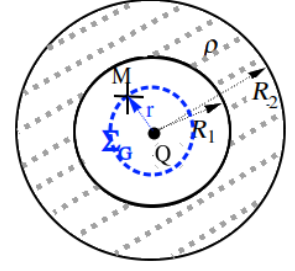


Figure 1.3

Si $R_1 \leq r \leq R_2$: (figure 1.7)

$$\begin{aligned} Q_{int}(\Sigma_G) &= Q + \iiint_{V_1} \rho dV_1 \\ &= Q + \iiint_{V_1} \rho r'^2 dr' \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= Q + \rho \cdot \frac{4}{3}\pi (r^3 - R_1^3) \end{aligned} \quad (1.4)$$

où nous avons intégré r' de R_1 à r dans l'expression précédente.

d'où (1.2) et (1.4) permettent d'écrire :

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0} + \frac{4\pi\rho}{3\varepsilon_0} (r^3 - R_1^3)$$

soit alors :

$$\vec{E}(R_1 \leq r \leq R_2) = \left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{(r^3 - R_1^3)}{r^2} \right] \vec{e}_r$$

Si $r \geq R_2$: (figure 1.5)

$$\begin{aligned} Q_{int}(\Sigma_G) &= Q + \iiint_{V_2} \rho dV_2 \\ &= Q + \iiint_{V_2} \rho r'^2 dr' \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= Q + \rho \cdot \frac{4}{3}\pi (R_2^3 - R_1^3) \end{aligned} \quad (1.5)$$

où nous avons cette fois intégré r' de R_1 à R_2 dans l'expression précédente.

d'où (1.2) et (1.5) permettent d'écrire :

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0} + \frac{4\pi\rho}{3\varepsilon_0} (R_2^3 - R_1^3)$$

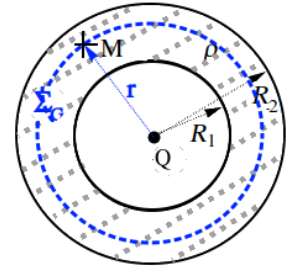


Figure 1.4

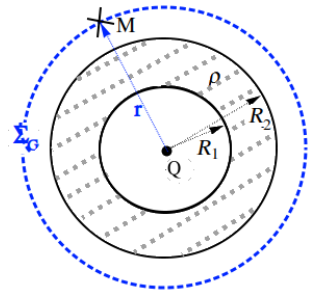


Figure 1.5

soit alors :

$$\vec{E}(r \geq R_2) = \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{(R_2^3 - R_1^3)}{r^2} \right] \vec{e}_r$$

II Rappel de magnétostatique

II.1 Source de champ magnétique

La source d'un champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ en un point M de l'espace et à un instant t est un courant électrique. Si ces courants sont statiques on parle alors de *magnétostatique*.

À un ensemble de charges électriques de densité volumique $\rho(P, t)$ en mouvement ordonné à la vitesse moyenne $\vec{v}$ on peut associer un courant électrique. On parle alors dans ce cas de courant volumique et on définit ainsi *un vecteur densité volumique de courant électrique* $\vec{j}(P, t)$ par :

$$\vec{j}(P, t) = \rho(P, t) \cdot \vec{v} \quad (1.6)$$

Une analyse dimensionnelle permet d'écrire :

$$\begin{aligned} [j] = [\rho] [v] &= \frac{[q]}{[\mathcal{V}]} \cdot \frac{L}{T} \\ &= \frac{[q]}{L^3} \cdot \frac{L}{T} \\ &= \frac{[q]}{L^2} \cdot \frac{1}{T} \\ &= \frac{[I]}{[S]} = \frac{[\text{courant}]}{[\text{surface}]} \end{aligned}$$

Ainsi, $|\vec{j}|$ s'exprime en $A.m^{-2}$. Il s'en suit immédiatement que, pour remonter à l'intensité du courant $I(t)$ qui circule dans le volume $\mathcal{V}$ il faut calculer le flux du vecteur $\vec{j}(P, t)$ à travers la surface S que traversent les charges en mouvement :

$$I(t) = \iint_{P \in S} \vec{j}(P, t) \cdot d\vec{S}(P) \quad (1.7)$$

Il est enfin à noter que les distributions linéiques de courants (ou encore les courants filiformes) sont simplement représentés par leur intensité I (pas de densité linéique de courant).

Remarque : *Équation locale de conservation de la charge électrique*

On considère un ensemble de charges, de densité volumique $\rho(x, t)$ supposée positive, en mouvement ordonné suivant l'axe $(x'x)$ à la vitesse d'ensemble constante $\vec{v} = v\vec{e}_x$. On se propose d'exprimer la variation dq de la charge contenue dans le volume $d\mathcal{V} = S \cdot dx$ pendant l'intervalle de temps dt .

$$\begin{aligned}
dq &= \delta q_{t+dt} - \delta q_t \\
&= \rho(x, t + dt)d\mathcal{V} - \rho(x, t)d\mathcal{V} \\
&= [\rho(x, t + dt) - \rho(x, t)] S.dx \\
&= \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dt.S.dx
\end{aligned} \tag{1.8}$$

D'un autre coté, la charge dq est égale à la somme *algébrique* des charges δq_x et δq_{x+dx} qui ont traversé la surface S respectivement en x et en $x + dx$ (voir figure 1.6), ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
dq &= \delta q_x + \delta q_{x+dx} \\
&= j(x, t).S.dt - j(x + dx, t).S.dt \\
&= [j(x, t) - j(x + dx, t)] S.dt \\
&= -\frac{\partial j(x, t)}{\partial x} dx.S.dt
\end{aligned} \tag{1.9}$$

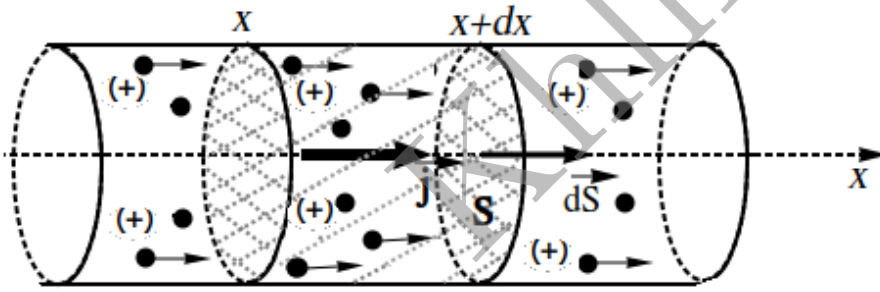


Figure 1.6

Les équations (1.8) et (1.9) permettent alors d'avoir :

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dt.S.dx = -\frac{\partial j(x, t)}{\partial x} dx.S.dt$$

soit :

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial j(x, t)}{\partial x}.$$

Dans le cas général, une étude similaire suivant les axes $(y'y)$ et $(z'z)$ permet d'avoir des résultats analogues, soit :

$$\frac{\partial \rho(y, t)}{\partial t} = -\frac{\partial j_y(y, t)}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \rho(z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial j_z(z, t)}{\partial z}$$

Il s'en suit que :

$$\frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} = -\left[\frac{\partial j_x(M, t)}{\partial x} + \frac{\partial j_y(M, t)}{\partial y} + \frac{\partial j_z(M, t)}{\partial z} \right]$$

En introduisant l'opérateur mathématique *divergence* d'un vecteur $\vec{A}(M) = A_x(M)\vec{e}_x + A_y(M)\vec{e}_y + A_z(M)\vec{e}_z$ définit, en coordonnées cartésiennes, par :

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x(M)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(M)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(M)}{\partial z}$$

il vient finalement que *l'équation locale de conservation de la charge électrique* s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} + \text{div } \vec{j}(M, t) = 0} \quad (1.10)$$

On note enfin, qu'en régime statique, l'équation précédente se ramène simplement à :

$$\text{div } \vec{j}(M) = 0$$

II.2 Théorème d'Ampère

Énoncé :

La circulation $\mathcal{C}_B$ du champ magnétique $\vec{B}(M)$ sur un contour fermé et orienté arbitrairement Γ_A , appelé contour d'Ampère, est égale au courant algébrique total enlacé par ce contour multipliée par μ_0 .

$$\mathcal{C}_B \underset{(def)}{\equiv} \oint_{M \in \Gamma_A} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l}(M) = \mu_0 \cdot I_{\text{enlacé}} \quad (1.11)$$

où μ_0 (en $H.m^{-1}$) désigne la perméabilité magnétique du vide.

Exemple 1 : Cylindres coaxiaux

On se propose d'appliquer le théorème d'Ampère (1.11) pour le calcul du champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé en tout point M de l'espace. La distribution de courants est représentée par la figure 1.7 ci-contre : un premier cylindre infini plein de rayon R_1 est parcouru par un courant volumique de densité uniforme $\vec{j}_1 = j_0 \vec{e}_z$ et un second cylindre infini creux, coaxial au premier, de rayon intérieur R_2 et de rayon extérieur R_3 est parcouru par la même densité de courant uniforme sauf qu'en sens inverse $\vec{j}_2 = -j_0 \vec{e}_z$.

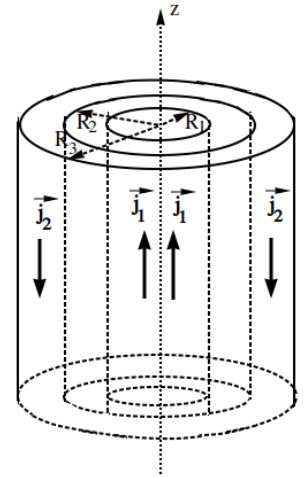


Figure 1.7

i) Choix de la base : Le problème est à symétrie cylindrique d'où on choisit de travailler en coordonnées cylindriques (r, θ, z) dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

ii) Étude d'invariances et de symétries :

Étude d'invariances :

La distribution de courants reste invariante par rotation d'un angle θ ou par translation suivant (z/z) (*i.e.* par changement de θ ou de z) d'où, d'après le principe de Curie le champ $\vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta, z)$ ne dépend ni de θ ni de $z \rightarrow \vec{B}(M) = \vec{B}(r)$.

Étude de symétries :

Le plan $\Pi = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie géométrique. De plus, de part et d'autre de ce plan, les courants sont symétriques, d'où il s'agit d'un plan de symétrie paire, et -par conséquent- $\vec{B}(M) \perp \Pi$ ³. Il s'en suit alors que $\vec{B}(M) = B(M)\vec{e}_\theta$.

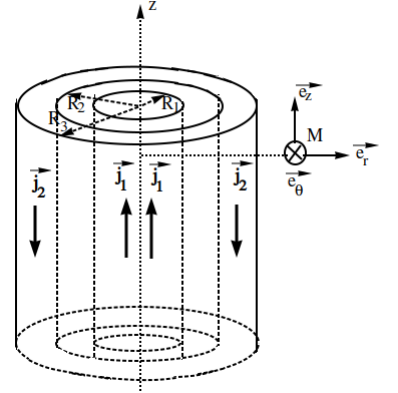


Figure 1.8

Finalement, par symétries et invariances, on a : $\vec{B}(M) = B(r)\vec{e}_\theta$.

iii) Calcul :

* La première étape s'agit toujours d'exprimer la circulation $\mathcal{C}_B$ du champ magnétique $\vec{B}(M)$ à travers un contour fermé et arbitrairement orienté de centre O et de rayon r ⁴ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_B &= \oint_{M \in \Gamma_A} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l}(M) \\
 &= \oint_{M \in \Gamma_A} B(r)\vec{e}_\theta \cdot d\vec{l}(M)\vec{e}_\theta \\
 &= \oint_{M \in \Gamma_A} B(r) \cdot r d\theta \\
 &= 2\pi r B(r)
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

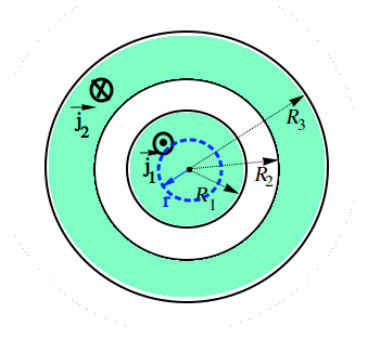
* La deuxième étape consiste à exprimer le courant total qui passe à l'intérieur du contour d'Ampère Γ_A de rayon r . Il s'agit alors ici de discuter suivant que $r \leq R_1$, $R_1 \leq r \leq R_2$, $R_2 \leq r \leq R_3$ ou bien $r \geq R_3$.

3. Contrairement à $\vec{E}(M)$ qui est un vrai vecteur, $\vec{B}(M)$ est dit pseudo-vecteur : il est perpendiculaire à un plan de symétrie paire et il appartient à un plan de symétrie impaire.

4. Le rayon du contour d'Ampère est toujours égal à r car il doit impérativement passer par le point M où on cherche à calculer $\vec{B}(M)$

Si $0 \leq r \leq R_1$:(figure 1.9(a))

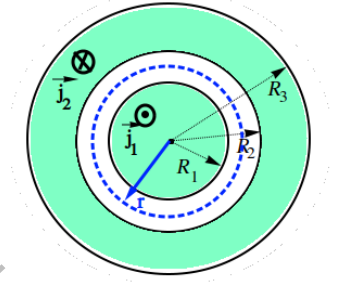
$$I_{\text{enlacé}} = \iint_{S_1(\Gamma_A)} \vec{j}_1 \vec{dS}_1 = \iint_{S_1(\Gamma_A)} j_0 dS_1 = j_0 \cdot \pi r^2 \quad (1.13)$$



(a)

Si $R_1 \leq r \leq R_2$:(figure 1.9(b))

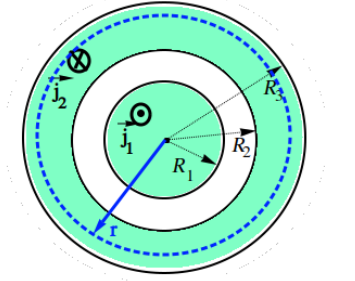
$$I_{\text{enlacé}} = \iint_{S_2(\Gamma_A)} \vec{j}_1 \vec{dS}_2 = \iint_{S_2(\Gamma_A)} j_0 dS_2 = j_0 \cdot \pi R_1^2 \quad (1.14)$$



(b)

Si $R_2 \leq r \leq R_3$:(figure 1.9(c))

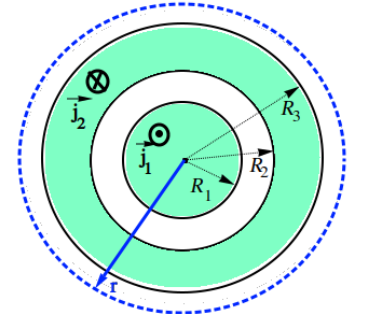
$$\begin{aligned} I_{\text{enlacé}} &= j_1 \cdot \pi R_0^2 + \iint_{S_3(\Gamma_A)} \vec{j}_2 \vec{dS}_3 = j_0 \cdot \pi R_1^2 + \iint_{S_3(\Gamma_A)} (-j_0) dS_3 \\ &= j_0 \cdot \pi R_1^2 - j_0 \pi (r^2 - R_2^2) \end{aligned} \quad (1.15)$$



(c)

Si $r \geq R_3$:(figure 1.9(d))

$$\begin{aligned} I_{\text{enlacé}} &= j_0 \cdot \pi R_1^2 + \iint_{S_4(\Gamma_A)} \vec{j}_2 \vec{dS}_4 = j_0 \cdot \pi R_1^2 + \iint_{S_4(\Gamma_A)} (-j_0) dS_4 \\ &= j_0 \cdot \pi R_1^2 - j_0 \pi (R_3^2 - R_2^2) \end{aligned} \quad (1.16)$$



(d)

Figure 1.9

Finalement, combiner l'équation (1.12) aux équations (1.13)-(1.16) permet de déduire le champ magnétique créé par la distribution de courant étudiée dans chaque cas. En effet,

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I_{\text{enlacé}}}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

Exemple 2 : Solénoïde infini

On se propose de calculer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé en tout point M de l'espace par un solénoïde de longueur L supposée très grande et comportant N spires jointives parcourue chacune par un courant d'intensité I (figure 1.10). On désignera par $n = N/L$ le nombre de spires par unité de longueur.

i) Choix de la base : Le problème est à symétrie cylindrique d'où on choisit de travailler en coordonnées cylindriques (r, θ, z) dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

ii) Étude d'invariances et de symétries :

Étude d'invariances :

La distribution de courants reste invariante par rotation d'un angle θ ou par translation suivant (z/z) (i.e. par changement de θ ou de z) d'où, d'après le principe de Curie le champ $\vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta, z)$ ne dépend ni de θ ni de $z \rightarrow \vec{B}(M) = \vec{B}(r)$.

Étude de symétries :

Le plan $\Pi = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie géométrique. De plus, de part et d'autre de ce plan, les courants sont symétriques, d'où il s'agit d'un plan de symétrie paire, et -par conséquent- $\vec{B}(M) \perp \Pi$. Il s'en suit alors que $\vec{B}(M) = B(M)\vec{e}_z$.

Finalement, par symétries et invariances on a : $\vec{B}(M) = B(r)\vec{e}_z$.

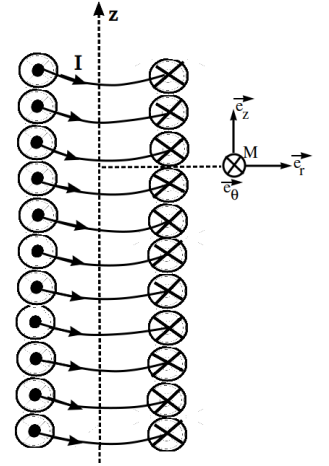


Figure 1.10

iii) Calcul :

* La circulation $\mathcal{C}_B$ du champ magnétique $\vec{B}(M)$ à travers un contour fermé et orienté $ABCD$ de longueur $AB = CD = \ell$ (figure 1.11) s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_B &= \oint_{M \in \Gamma_A} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l}(M) \\ &= \int_A^B B(r_1) \vec{e}_z \cdot dz \vec{e}_z + \int_B^C \underbrace{B(r) \vec{e}_z \cdot dr \vec{e}_r}_{=0} + \int_C^D B(r_2) \vec{e}_z \cdot (-dz \vec{e}_z) + \int_D^A \\ &= [B(r_1) - B(r_2)] \cdot \ell \end{aligned}$$

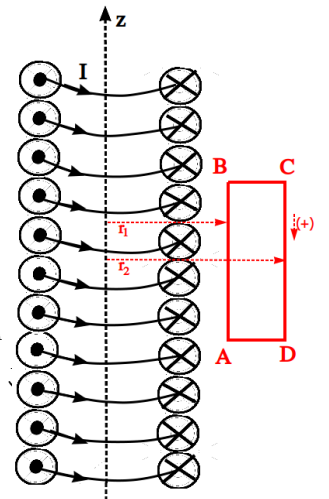


Figure 1.11

* Exprimons maintenant le courant $I_{\text{enlacé}}$ passant à l'intérieur du contour d'Ampère $ABCD$.

Si $r_2 > R$ et $r_1 > R$:(figure 1.11)

Aucun courant ne passe à l'intérieur du contour d'Ampère
 $\rightarrow I_{\text{enlacé}} = 0$

Il s'en suit que : $B(r_2) = B(r_1) \equiv B_{\text{ext}} = \text{cte}$

En admettant que $B(r \rightarrow \infty) = 0$, il vient alors que le champ magnétique est partout nul à l'extérieur du solénoïde infini

$$\boxed{\vec{B}_{\text{ext}} \equiv \vec{B}(r > R) = \vec{0}}$$

Si $r_1 < R$ et $r_2 < R$:(figure 1.12)

Ici encore, aucun courant ne passe à l'intérieur du contour d'Ampère
 $\rightarrow I_{\text{enlacé}} = 0$

Il s'en suit que : $B(r_2) = B(r_1) \equiv B_{\text{int}} = \text{cte}$

$\rightarrow$ le champ est uniforme à l'intérieur du solénoïde

Si $r_1 < R$ et $r_2 > R$:(figure 1.13)

Le courant $I_{\text{enlacé}}$ qui passe à l'intérieur du contour est égal au nombre N_{sp} de spires multiplié par la valeur algébrique (conformément à l'orientation arbitrairement choisie pour le contour $ABCD$) de l'intensité du courant I circulant dans chaque spire :

$$I_{\text{enlacé}} = +N_{\text{sp}}.I = n\ell.I$$

D'où :

$$\begin{aligned} [B(r_1) - B(r_2)] \cdot \ell &= [B_{\text{int}} - B_{\text{ext}}] \cdot \ell = B_{\text{int}} \cdot \ell \\ &= \mu_0 n \ell . I \end{aligned}$$

Soit enfin :

$$\boxed{\vec{B}_{\text{int}} \equiv \vec{B}(r < R) = \mu_0 n I \vec{e}_z}$$

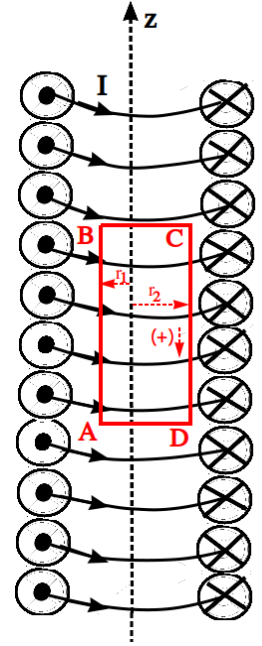


Figure 1.12

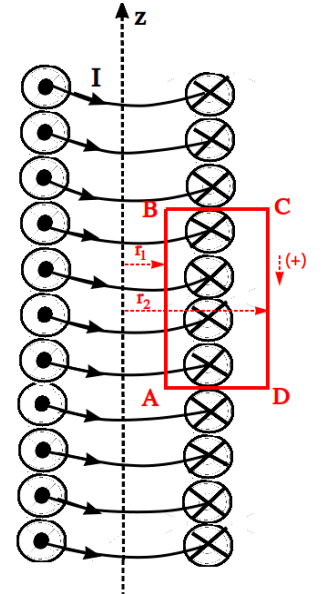


Figure 1.13

III Action d'un champ magnétique sur une distribution de courants : Force de Laplace

III.1 Densité de force de Laplace

On considère un conducteur au sein duquel un ensemble de porteurs de charge de densité volumique ρ sont en mouvement ordonné à la vitesse moyenne $\vec{v}$ engendrant ainsi un courant de vecteur densité volumique $\vec{j} = \rho \vec{v}$. On suppose que dans le milieu extérieur règne un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B}_{ext}$.

Sous l'action de $\vec{B}_{ext}$, une charge ponctuelle q subit la force magnétique suivante :

$$\vec{F}_{magn} = q \vec{v} \wedge \vec{B}_{ext}$$

Un élément de volume $d\mathcal{V}$ de ce conducteur, contenant la charge $dq = \rho d\mathcal{V}$, subit la force magnétique :

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{magn} &= dq \vec{v} \wedge \vec{B}_{ext} = \rho d\mathcal{V} \vec{v} \wedge \vec{B}_{ext} \\ &= \vec{j} \wedge \vec{B}_{ext} d\mathcal{V} \end{aligned} \quad (1.18)$$

On introduit alors le vecteur densité volumique de force magnétique $\vec{f}_L$, dite aussi *force de Laplace*, exercée par le champ magnétique $\vec{B}_{ext}$ sur la distribution de courant de densité volumique $\vec{j}$ comme suit :

$$\boxed{\vec{f}_L = \frac{\vec{F}_{magn}}{d\mathcal{V}} = \vec{j} \wedge \vec{B}_{ext}} \quad (1.19)$$

Remarques :

- La résultante des forces de Laplace s'exerçant sur une distribution volumique de courants s'écrit :

$$\vec{F}_L = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{j} \wedge \vec{B}_{ext} d\mathcal{V}$$

- Dans le cas d'une distribution de courant filiforme $\mathcal{C}$, la résultante des forces de Laplace se donne par :

$$\vec{F}_L = \int_{\mathcal{C}} I d\vec{l} \wedge \vec{B}_{ext}$$

III.2 Exemples

Exemple 1 : Rails de Laplace

On considère une barre conductrice en mouvement de translation sans frottement à la vitesse constante $\vec{v} = v\vec{e}_x$ sur deux rails horizontaux appelé *rails de Laplace*. Le système est parcouru par un courant d'intensité I et un champ magnétique $\vec{B}_0$ uniforme et stationnaire règne à l'extérieur (figure 1.14 ci-contre).

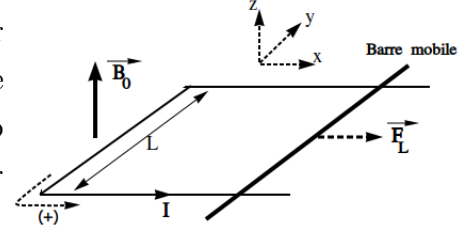


Figure 1.14

* La résultante des forces de Laplace s'appliquant sur la barre s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{F}_L &= \int_{\text{Barre}} I d\vec{l} \wedge \vec{B}_0 = \int_{-L/2}^{L/2} I dy \vec{e}_y \wedge B_0 \vec{e}_z \\ &= IB_0 L \vec{e}_x\end{aligned}$$

* La puissance des forces de Laplace est :

$$\mathcal{P}_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = IB_0 L v > 0$$

→ Il s'agit ici d'une puissance motrice

Exemple 2 : Spire rectangulaire en rotation

Une spire rectangulaire $ABCD$ de moment d'inertie J est parcourue par un courant d'intensité I et est soumise à l'action d'un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire $\vec{B}_0$. La spire, de cotés $AB = CD = a$ et $BC = DA = b$, est en rotation autour de l'axe $(x'x)$ à la vitesse angulaire constante $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_x = \dot{\alpha}(t) \vec{e}_x$ (voir figure 1.15 ci-bas).

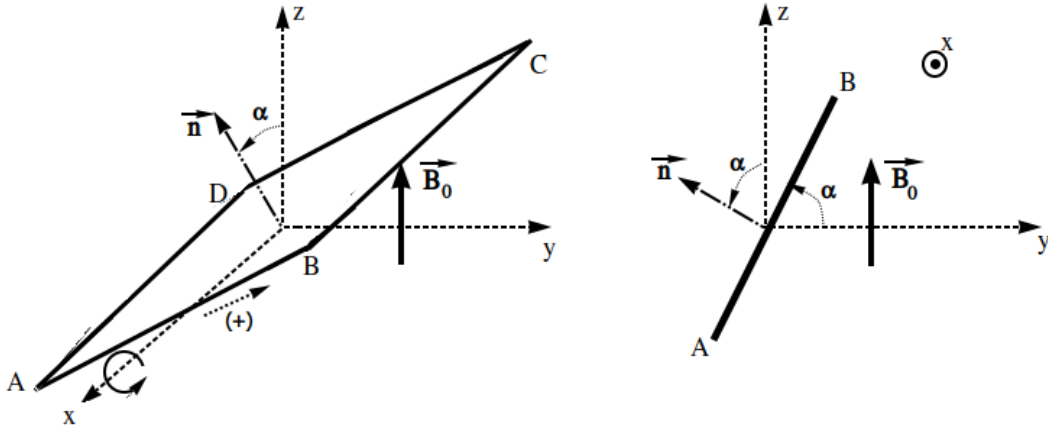


Figure 1.15 – Spire rectangulaire en rotation

On rappelle qu'une telle spire est équivalente à un dipôle magnétique de moment dipolaire $\vec{m} = I \cdot \vec{S} = I \cdot ab \cdot \vec{n}$ où $\vec{n} = \cos\alpha \vec{e}_z - \sin\alpha \vec{e}_y$

- La résultante des forces de Laplace exercées par le champ magnétique uniforme $\vec{B}_0$ sur la spire s'écrit :

$$\vec{F}_L = \oint_{spire} d\vec{F}_L = \oint_{spire} I d\vec{l} \wedge \vec{B}_0 = I \underbrace{\left(\oint_{spire} d\vec{l} \right)}_{=\vec{0}} \wedge \vec{B}_0 = \vec{0}$$

On retient alors le résultat suivant : *L'action d'un champ magnétique extérieur uniforme sur un dipôle magnétique se réduit à un couple.*

On désigne par $\vec{\mathcal{M}}(\vec{F}_L)$ le moment de ce couple et on se propose de l'exprimer.

- Le moment des forces de Laplace s'exerçant sur la spire s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}(\vec{F}_L) &= \oint_{M \in spire} d\vec{\mathcal{M}}(\vec{F}_L) = \oint_{M \in spire} \vec{OM} \wedge d\vec{F}_L(M) \\ &= \oint_{M \in spire} \vec{OM} \wedge (I d\vec{l}(M) \wedge \vec{B}_0) \end{aligned}$$

— Sur $[AB]$:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{LAB} &= \int_A^B I d\vec{l} \wedge \vec{B}_0 = I \left(\int_A^B d\vec{l} \right) \wedge \vec{B}_0 \\ &= I \cdot \vec{AB} \wedge \vec{B}_0 \\ &= I \cdot a (\cos\alpha \vec{e}_y + \sin\alpha \vec{e}_z) \wedge B_0 \vec{e}_z \\ &= IaB_0 \cos\alpha \vec{e}_x \end{aligned}$$

Si on désigne par M_1 le barycentre du segment $[AB]$ (*i.e.* son milieu), il vient que le moment des forces de Laplace exercées sur le segment $[AB]$ (et calculé au point O) s'écrit :

$$\vec{\mathcal{M}}(\vec{F}_{LAB}) = \vec{OM}_1 \wedge \vec{F}_{LAB} = \frac{b}{2} \vec{e}_x \wedge IaB_0 \cos\alpha \vec{e}_x = \vec{0}$$

— Sur $[CD]$:

En désignant par M_3 le barycentre du segment $[CD]$, un calcul analogue au précédent permet d'obtenir :

$$\vec{\mathcal{M}}(\vec{F}_{LCD}) = \vec{OM}_3 \wedge \vec{F}_{LCD} = \vec{0}$$

— Sur $[BC]$:

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_{L_{BC}} &= \int_B^C I d\vec{l} \wedge \vec{B}_0 = I \left(\int_B^C d\vec{l} \right) \wedge \vec{B}_0 \\
 &= I \cdot \vec{BC} \wedge \vec{B}_0 \\
 &= I \cdot (-b\vec{e}_x) \wedge B_0 \vec{e}_z \\
 &= IbB_0 \vec{e}_y
 \end{aligned}$$

Soit M_2 le barycentre du segment $[BC]$ (*i.e.* son milieu). D'où le moment des forces de Laplace exercées sur le segment $[BC]$ (et calculé au point O) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathcal{M}}(\vec{F}_{L_{BC}}) &= \vec{OM_2} \wedge \vec{F}_{L_{BC}} = \frac{a}{2} (\cos\alpha \vec{e}_y + \sin\alpha \vec{e}_z) \wedge IbB_0 \vec{e}_y \\
 &= -I \frac{ab}{2} B_0 \sin\alpha \vec{e}_x
 \end{aligned}$$

— Sur $[DA]$:

Un calcul analogue au précédent permet d'écrire :

$$\vec{F}_{L_{DA}} = I \cdot \vec{DA} \wedge \vec{B}_0 = Ib\vec{e}_x \wedge B_0 \vec{e}_z = -IbB_0 \vec{e}_y$$

et, en désignant par M_4 le barycentre du segment $[DA]$, il vient que :

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathcal{M}}(\vec{F}_{L_{DA}}) &= \vec{OM_4} \wedge \vec{F}_{L_{DA}} = \frac{-a}{2} (\cos\alpha \vec{e}_y + \sin\alpha \vec{e}_z) \wedge (-IbB_0 \vec{e}_y) \\
 &= -I \frac{ab}{2} B_0 \sin\alpha \vec{e}_x
 \end{aligned}$$

Finalement, le moment des forces de Laplace s'exerçant sur la spire se donne par :

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathcal{M}}(\vec{F}_L) &= \vec{\mathcal{M}}(\vec{F}_{L_{AB}}) + \vec{\mathcal{M}}(\vec{F}_{L_{BC}}) + \vec{\mathcal{M}}(\vec{F}_{L_{CD}}) + \vec{\mathcal{M}}(\vec{F}_{L_{DA}}) \\
 &= -IabB_0 \sin\alpha \vec{e}_x
 \end{aligned}$$

En remarquant enfin que : $\vec{m} \wedge \vec{B}_0 = Iab (\cos\alpha \vec{e}_z - \sin\alpha \vec{e}_y) \wedge B_0 \vec{e}_z = -IabB_0 \sin\alpha \vec{e}_x$

On établit alors que, l'action des forces de Laplace exercée par un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B}_0$ sur un dipôle magnétique de moment $\vec{m}$ se réduit à un couple de moment :

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}(\vec{F}_L) = \vec{m} \wedge \vec{B}_0} \quad (1.20)$$

Remarques :

- La spire est en équilibre si : $\vec{\mathcal{M}}(\vec{F}_L) = \vec{0}$, soit alors :

$$\alpha = 0 \text{ (position d'équilibre stable)} \quad \text{ou} \quad \alpha = \pi \text{ (position d'équilibre instable)}$$

Le champ extérieur $\vec{B}_0$ tend à aligner le dipôle magnétique $\vec{m}$ suivant sa direction.

- La puissance des actions mécaniques de Laplace s'écrit :

$$\mathcal{P} = \vec{\mathcal{M}}(\vec{F}_L) \cdot \vec{L}$$

où $\vec{L} = J\vec{\Omega}$ désigne le moment cinétique de la spire en rotation (J étant son moment d'inertie). Soit alors :

$$\mathcal{P} = -JIabB_0\Omega\sin\alpha$$

A. Khelif