

Introduction

I Signaux électriques

Un signal électrique est la variation (de courte durée) d'une grandeur électrique (notamment la tension et l'intensité de courant) dans un milieu matériel conducteur de l'électricité.

I.1 Signal monochromatique

Le signal est dit temporellement périodique s'il se reproduit identiquement à lui même après un intervalle de temps bien déterminé T qu'on appelle « période ».

Un signal $s(t)$ périodique monochromatique s'écrit :

$$s(t) = S_M \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) = S_M \cos(2\pi ft + \varphi) = S_M \cos(\omega t + \varphi)$$

telque :

- S_M est l'amplitude du signal
- $\omega t + \varphi$ est sa phase à l'instantané (à l'instant t)

Avec :

- φ est la phase à l'origine des temps (pour $t=0$)
- $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ (en $rad.s^{-1}$) est sa pulsation
- $f = \frac{1}{T}$ (en Hz) est la fréquence du signal

Remarques :

Il est souvent commode d'associer au signal monochromatique $s(t)$ une représentation complexe $\underline{s}(t)$ donnée par :

$$\underline{s}(t) = S_M e^{i(\omega t + \varphi)} = \underline{S}_M e^{i\omega t}$$

telque $\underline{S}_M = S_M e^{i\varphi}$ représente l'amplitude complexe du signal. Pour revenir en notation réelle il suffit simplement de se rappeler que : $s(t) = \text{Ré}(\underline{s}(t))$

I.2 Analyse spectrale d'un signal périodique

I.2.1 Décomposition de Fourier d'un signal périodique

Les signaux électriques dépendant du temps, utilisés en électronique, sont rarement parfaitement sinusoidaux (i.e. monochromatiques), mais peuvent toujours se décomposer en une superposition de signaux sinusoidaux de pulsations différentes.

En particulier, si le signal $e(t)$ est de période T , on peut le décomposer en série de Fourier :

$$e(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n.\omega t) + b_n \sin(n.\omega t)] \quad (1.1)$$

Où : a_0 représente la valeur moyenne du signal $e(t)$:

$$\langle e(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e(t) dt = a_0$$

et a_n et b_n désignent les coefficients de Fourier, dont les expressions respectives sont :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T e(t) \cos(n.\omega t) dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T e(t) \sin(n.\omega t) dt$$

Remarques :

- Le signal $e(t)$ est pair, alors ses coefficients de Fourier b_n sont nuls, et on a :

$$e(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n.\omega t)$$

En effet, $e(-t) = e(t)$ donne :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n.\omega t) - b_n \sin(n.\omega t)] = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n.\omega t) + b_n \sin(n.\omega t)]$$

ce qui implique forcément que $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.

- Si le signal $e(t)$ est impair, alors ses coefficients de Fourier a_n sont nuls, et on a :

$$e(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n.\omega t)$$

En effet, $e(-t) = -e(t)$ donne :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n.\omega t) - b_n \sin(n.\omega t)] = -a_0 - \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n.\omega t) + b_n \sin(n.\omega t)]$$

ce qui implique forcément que $a_0 = 0$ et $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.

Alternativement, comme $a_n \cos(n.\omega t) + b_n \sin(n.\omega t) = C_n \cos(n.\omega t + \varphi_n)$ (où $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$), la décomposition en série de Fourier du signal $e(t)$ peut aussi s'écrire :

$$e(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n.\omega t + \varphi_n) \quad (1.2)$$

Où : C_0 représente la composante continue du signal et $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n.\omega t + \varphi_n)$ sa composante alternative.

$C_n \cos(n.\omega t + \varphi_n)$, appelée « harmonique de rang n », est de pulsation ω_n multiple entier de la pulsation propre ω du signal ($\omega_n = n.\omega$). Le cas particulier $n = 1$ correspond à « l'harmonique fondamentale », celle-ci est de pulsation égale à celle du signal $e(t)$: $\omega_1 = \omega$.

I.2.2 Spectre d'un signal périodique

Pour le signal périodique $e(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n.\omega t + \varphi_n)$ la représentation des amplitudes C_n en fonction des pulsations $\omega_n = n.\omega$ correspondantes est appelée « spectre d'amplitude » du signal $e(t)$.

Exemples :

1. Le spectre du signal monochromatique $e(t) = E_M \cos(\omega t + \varphi)$ contient un seul pic à la pulsation ω (figure 1.1)

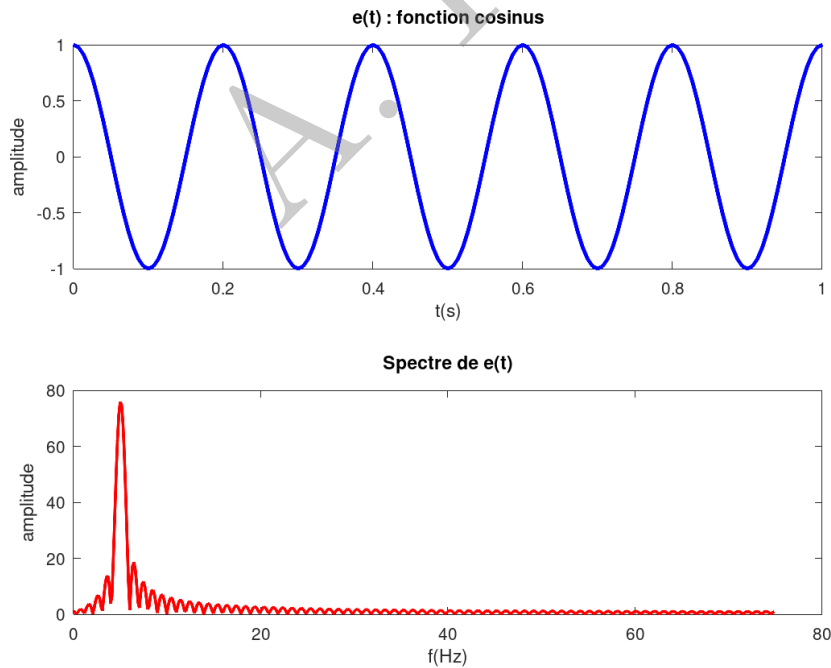


Figure 1.1 – Spectre d'un signal monochromatique

2. Le signal carré (dit aussi créneau) impair est donné par :

$$e(t) = \begin{cases} A & \text{si } 0 < t < T/2 \\ -A & \text{si } T/2 < t < T \end{cases}$$

Où $A = 1$ et $T = 0.2 \text{ s}$ dans l'exemple de la figure 1.2.

Ses coefficients de Fourier sont donnés par : $a_n = 0$ et $b_n = C_n = \frac{2A}{n} \cdot (1 - \cos(n\pi))$. On constate dans ce cas que C_n sont nuls si n est pair, et qu'ils décroissent en $\frac{1}{n}$. Ainsi, le spectre du signal créneau en question est représenté sur la figure 1.2.

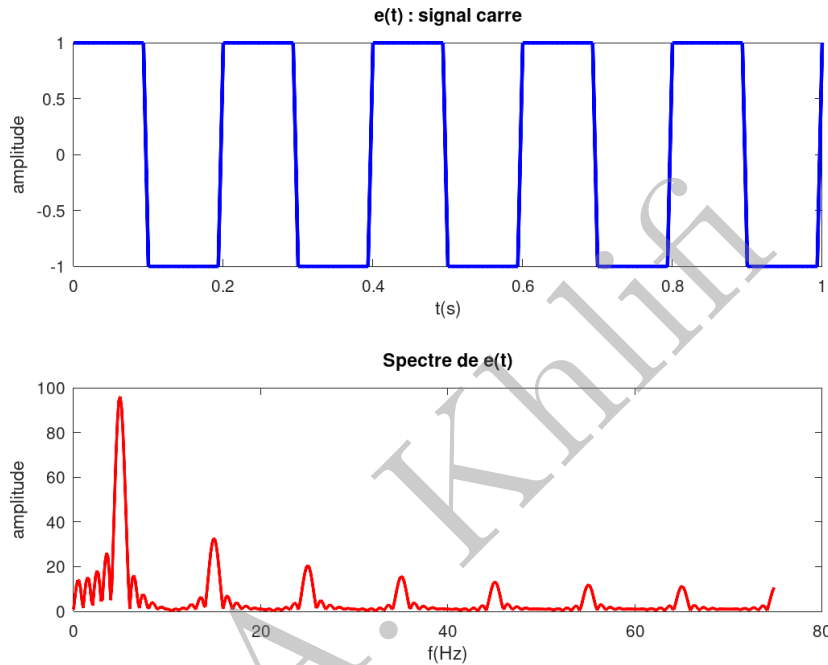


Figure 1.2 – Spectre d'un signal carré. Les amplitudes des harmoniques décroissent en $1/n$.

3. Le signal triangulaire pair est donné par :

$$e(t) = \begin{cases} At + B & \text{si } 0 < t < T/2 \\ -At + B & \text{si } T/2 < t < T \end{cases}$$

Où $A =$, $B =$ et $T =$ dans l'exemple de la figure 1.3.

Ses coefficients de Fourier sont donnés par : $b_n = 0$ et $a_n = C_n = \frac{2AT}{n^2\pi^2} \cdot (1 - \cos(n\pi))$. On constate dans ce cas que C_n sont nuls si n est pair, et qu'ils décroissent en $\frac{1}{n^2}$. Ainsi, le spectre du signal triangulaire en question est représenté sur la figure 1.3.

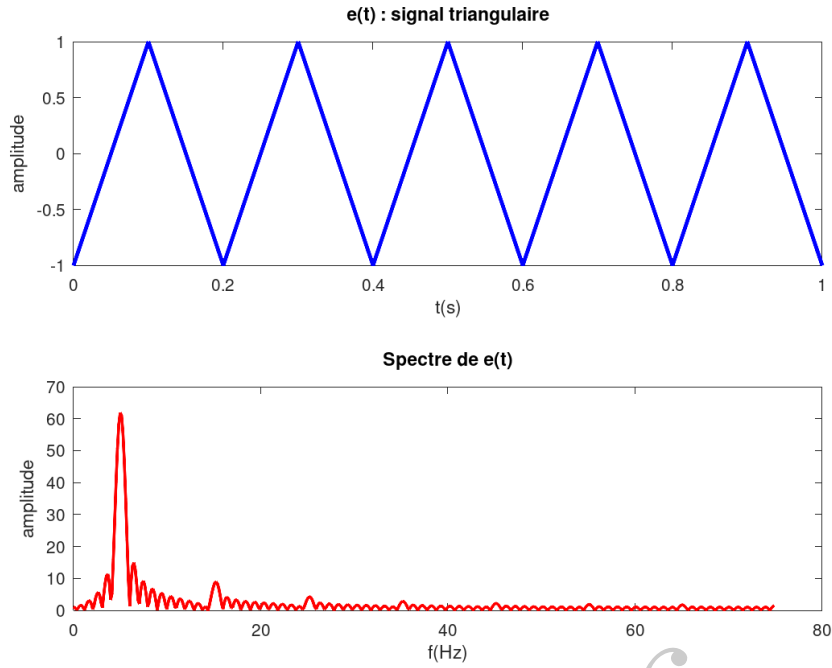


Figure 1.3 – Spectre d'un signal triangulaire. Les amplitudes des harmoniques décroissent en $1/n^2$.

Remarques :

Si le signal $e(t)$ n'est pas périodique, il reste encore décomposable en une somme de signaux monochromatiques, mais contrairement au cas d'un signal périodique où la sommation est discrète, elle devient continue dans ce cas (la somme discrète se transforme en une intégrale). Ainsi, le spectre $\underline{g}(\omega)$ d'un signal non périodique représenté en notation complexe par $\underline{e}(t)$ s'obtient par une Transformée de Fourier Directe de $\underline{e}(t)$ telle que :

$$\underline{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{e}(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

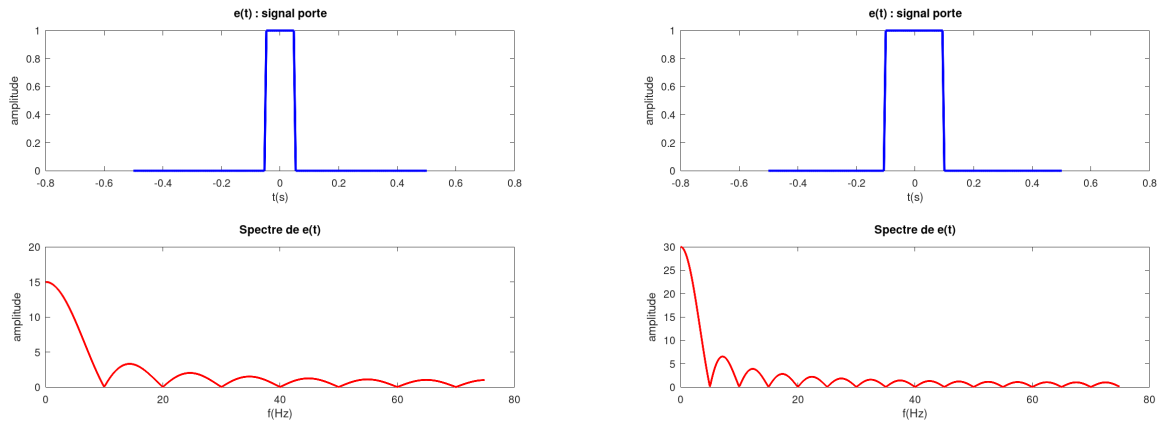
Inversement, le signal $\underline{e}(t)$ se reconstruit à partir de son spectre $\underline{g}()$ par le biais d'une Transformée de Fourier Inverse :

$$\underline{e}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{g}(\omega) \cdot e^{+i\omega t} d\omega$$

Notons qu'ici les pulsations vont bien de $-\infty$ à $+\infty$ alors que nous savons que les pulsations négatives n'ont pas d'interprétation physique. Cela n'a pas d'importance puisque, comme tout signal physique est intrinsèquement à valeurs réelles, $\underline{g}(-\omega)$ n'est autre que le conjugué de $\underline{g}(\omega)$: $\underline{g}(-\omega) = \underline{g}^*(\omega)$.

Exemples :

1. Signal porte :

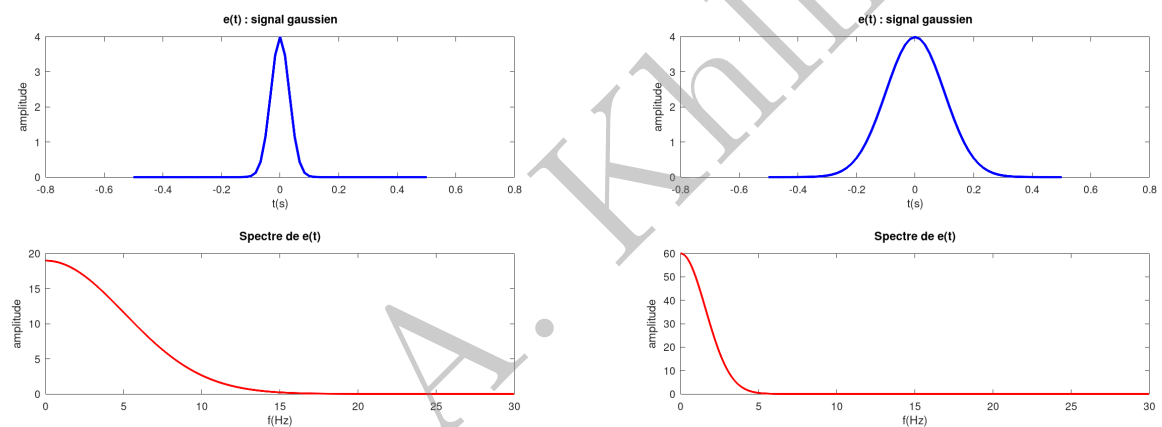


(a) Signal porte étroit

(b) Signal porte large

Figure 1.4 – Spectre d'un signal porte

2. Signal gaussien :



(a) Signal gaussien étroit

(b) Signal gaussien large

Figure 1.5 – Spectre d'un signal gaussien

À partir des figures 1.4 et 1.5 ci-dessus, on remarque que plus le signal est de courte durée ($\Delta t \searrow$) plus son spectre est large ($\Delta f \nearrow$) et inversement. Ceci se traduit par la relation suivante :

$$\Delta t \cdot \Delta f \sim 1$$

II Action d'un filtre linéaire sur un signal périodique

II.1 Les filtres passifs

II.1.1 Filtre passe-bas d'ordre 1

On considère le circuit de la figure 1.6 ci-contre constitué d'une association en série d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C . Le circuit est alimenté par une tension d'entrée sinusoïdale $V_e(t)$ et la tension de sortie $V_s(t)$ est mesurée aux bornes du condensateur.

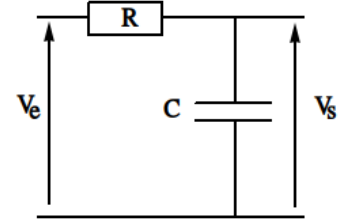


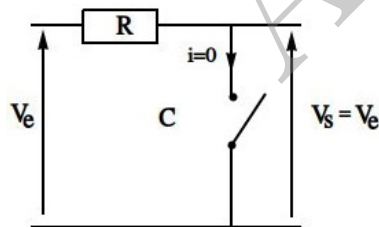
Figure 1.6

a- Comportement basses/hautes fréquences

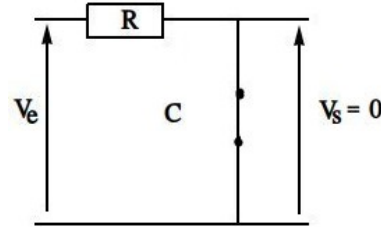
Les impédances complexes Z_R et Z_C de la résistance et du condensateur sont données respectivement par : $Z_R = R$ et $Z_C = 1/jC\omega$. Par conséquent, le condensateur se comporte différemment aux basses et aux hautes fréquences, en effet :

$$\left\{ \begin{array}{ll} |Z_C| \rightarrow \infty \text{ lorsque } \omega \rightarrow 0 & : \text{le condensateur est équivalent à un circuit ouvert aux basses fréquences} \\ |Z_C| \rightarrow 0 \text{ lorsque } \omega \rightarrow \infty & : \text{le condensateur est équivalent à un fil conducteur aux hautes fréquences} \end{array} \right.$$

Compte tenu de ça, les représentations équivalentes du circuit de la figure 1.6 aux basses et aux hautes fréquences sont données par la figure 1.7.



(a) Cas des basses fréquences



(b) Cas des hautes fréquences

Figure 1.7 – Comportement du circuit en fonction de la fréquence

Quand $\omega \rightarrow \infty$ on $V_s \simeq 0$ tandis que pour $\omega \rightarrow 0$ on a $V_s \simeq V_e$: on en tire alors que le circuit de la figure 1.6 s'agit bien d'un filtre passe bas.

b- Fonction de transfert

En notation complexe, moyennant un diviseur de tension, la fonction de transfert du circuit

de la figure 1.6 s'écrit :

$$\begin{aligned}\underline{H}(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} &= \frac{Z_C}{Z_C + Z_R} \\ &= \frac{1}{1 + jRC\omega} \\ &= \frac{1}{1 + j\omega/\omega_0}\end{aligned}$$

Avec $\omega_0 = 1/RC$ désigne la pulsation propre du circuit.

Il est souvent commode d'introduire la pulsation réduite définie par $x = \omega/\omega_0$. Dans ce cas, la fonction de transfert s'écrit finalement :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_0} = \frac{1}{1 + jx} \quad (1.3)$$

L'expression de la fonction de transfert présente des puissances 1 de x (*i.e.* de ω), on en tire alors que le filtre est d'ordre 1.

c- Diagramme de bode

Le diagramme de bode est constitué de deux courbes : une courbe de gain $G_{dB}(x)$ et une courbe de phase $\varphi(x)$ telle que :

- Le gain en décibels est :

$$\begin{aligned}G_{dB}(x) &= 20 \log (|\underline{H}(jx)|) \\ &= -20 \log \sqrt{1 + x^2}\end{aligned} \quad (1.4)$$

- La phase est :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \arg (\underline{H}(jx)) \\ &= -\arctg (x)\end{aligned} \quad (1.5)$$

Étude asymptotique :

Aux basses fréquences : $\omega \ll \omega_0$ ou encore $x \rightarrow 0$, il vient alors que :

- Le gain en décibels devient : $G_{dB}(x) \simeq 0 \text{ dB} \rightarrow$ asymptôte horizontale d'équation $G_{dB}(x) = 0$

- La phase devient : $\varphi(x) \simeq 0$

Aux hautes fréquences : $\omega \gg \omega_0$ ou encore $x \rightarrow \infty$, il vient alors que :

- Le gain en décibels devient : $G_{dB}(x) \simeq -20 \log(x) \rightarrow$ asymptôte oblique de pente -20dB/décade

- La phase devient : $\varphi(x) \simeq -\pi/2$

Courbe de gain :

À la lumière de l'étude asymptotique faite ci-dessus, on trace sur la figure 1.8 la courbe réelle ainsi que la courbe asymptotique, en représentation logarithmique, relatives au gain en décibels du filtre passe-bas d'ordre 1 étudié.

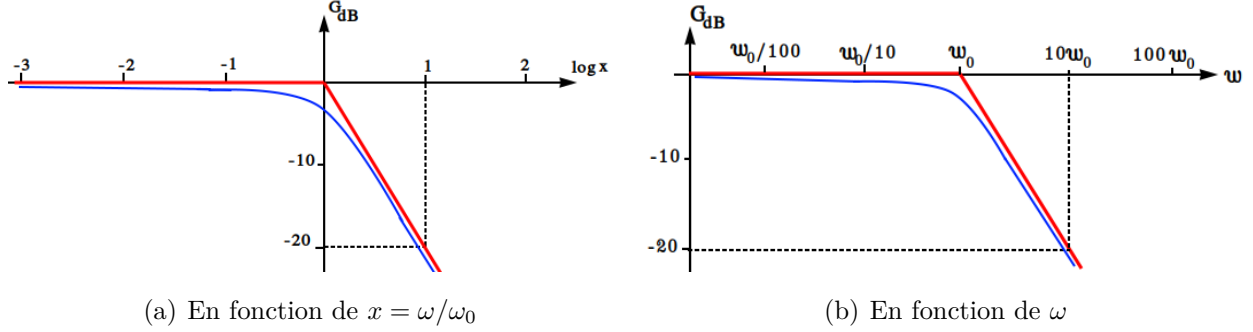


Figure 1.8 – Courbe de gain du filtre passe-bas d'ordre 1 : courbe asymptotique en rouge et courbe réelle en bleu.

Pulsation de coupure :

Par définition, la pulsation de coupure ω_c du filtre est déterminée pour :

$$G(\omega_c) \equiv |H(j\omega_c)| = \frac{|H|_{max}}{\sqrt{2}} \quad \text{soit encore} \quad G_{dB} = G_{dB,max} - 3dB \quad (1.6)$$

d- Comportement intégrateur du filtre

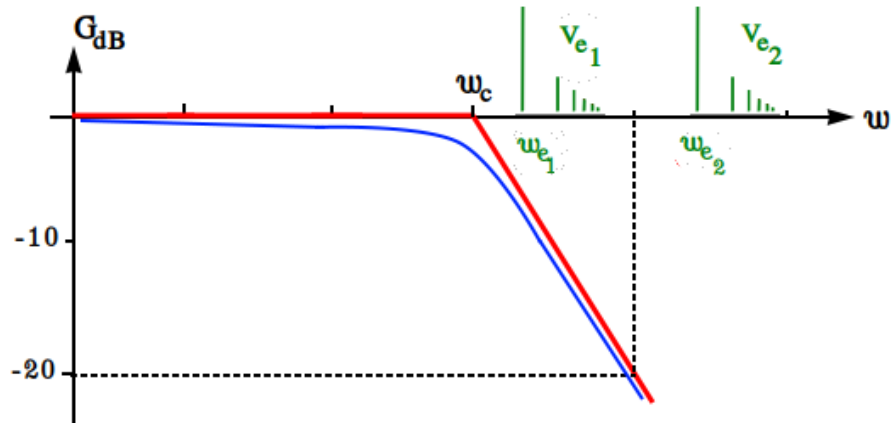
Dans le cas particulier où la pulsation ω du signal d'entrée $V_e(t)$ est très grande ($\omega \gg \omega_0$, i.e. $x \gg 1$), la fonction de transfert 1.3 du filtre passe-bas se ramène à :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} \simeq \frac{1}{j\omega/\omega_0}$$

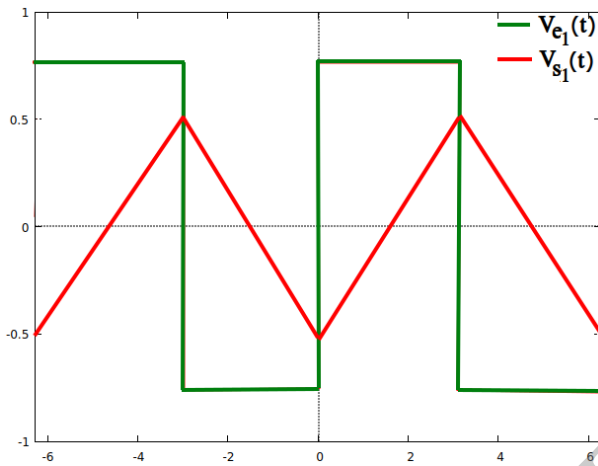
Soit encore,

$$V_s = \omega_0 \cdot \frac{V_e}{j\omega} = \omega_0 \cdot \int V_e(t) dt$$

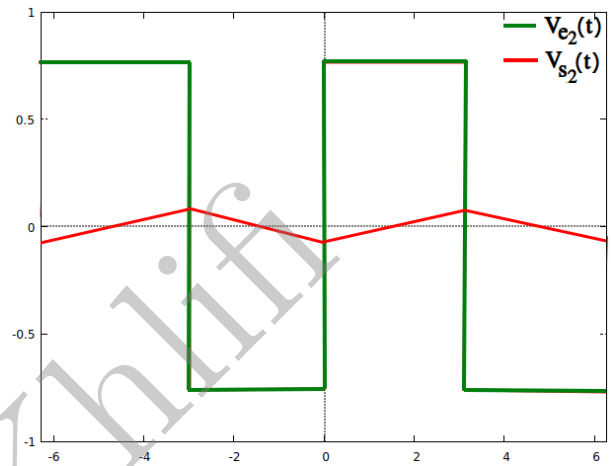
On en déduit qu'aux hautes fréquences, le filtre passe-bas d'ordre 1 se comporte comme un circuit intégrateur. Pour illustrer ce point, nous avons représenté sur la figure 1.9 la tension de sortie $V_s(t)$ obtenue à travers ce filtre pour un signal d'entrée $V_e(t)$ rectangulaire dont l'harmonique fondamentale est de pulsation ω_e .



(a)



(b)



(c)

Figure 1.9 – Action d'un filtre passe-bas d'ordre 1 sur un signal carré dont l'harmonique fondamentale est de pulsation ω_e

II.1.2 Filtre passe-haut d'ordre 1

On considère le circuit de la figure 1.10 ci-contre constitué d'une association en série d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C . Le circuit est alimenté par une tension d'entrée sinusoïdale $V_e(t)$ et la tension de sortie $V_s(t)$ est mesurée cette fois aux bornes de la résistance.

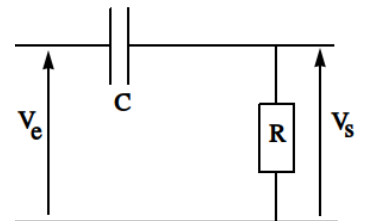


Figure 1.10

a- Comportement basses/hautes fréquences

Compte tenu du comportement du condensateur aux basses et aux hautes fréquences étudié dans la partie précédente, les représentations équivalentes du circuit de la figure 1.10 aux basses et aux hautes fréquences sont données par la figure 1.11.

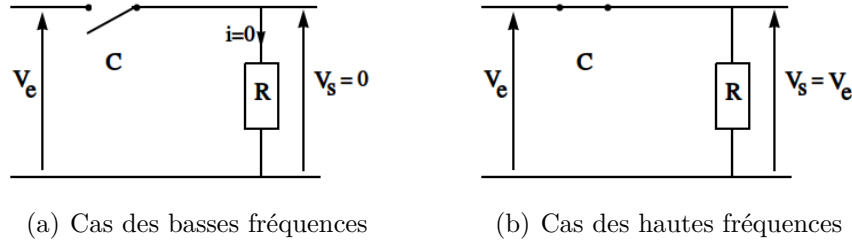


Figure 1.11 – Comportement du circuit en fonction de la fréquence

Quand $\omega \rightarrow 0$ on $V_s \simeq 0$ tandis que pour $\omega \rightarrow \infty$ on a $V_s \simeq V_e$: on en tire alors que le circuit de la figure 1.10 s'agit bien d'un filtre passe haut.

b- Fonction de transfert

En notation complexe, moyennant un diviseur de tension, la fonction de transfert du circuit de la figure 1.10 s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} &= \frac{Z_R}{Z_R + Z_C} \\ &= \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \\ &= \frac{j\omega/\omega_0}{1 + j\omega/\omega_0} \end{aligned}$$

Avec $\omega_0 = 1/RC$ est la pulsation propre du circuit.

En introduisant la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$, la fonction de transfert s'écrit finalement :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega/\omega_0}{1 + j\omega/\omega_0} = \frac{jx}{1 + jx} \quad (1.7)$$

L'expression de la fonction de transfert présente des puissances 1 de x (*i.e.* de ω), on en tire alors que le filtre est d'ordre 1.

c- Diagramme de bode

- Le gain en décibels est :

$$\begin{aligned} G_{dB}(x) &= 20 \log (|\underline{H}(jx)|) \\ &= 20 \log x - 20 \log \sqrt{1 + x^2} \end{aligned} \quad (1.8)$$

- La phase est :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \arg(\underline{H}(jx)) \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctg(x) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Étude asymptotique :

Aux basses fréquences : $\omega \ll \omega_0$ ou encore $x \rightarrow 0$, il vient alors que :

- Le gain en décibels devient : $G_{dB}(x) \simeq 20 \log(x) \rightarrow$ asymptôte oblique de pente $+20dB/décade$

- La phase devient : $\varphi(x) \simeq \pi/2$

Aux hautes fréquences : $\omega \gg \omega_0$ ou encore $x \rightarrow \infty$, il vient alors que :

- Le gain en décibels devient : $G_{dB}(x) \simeq 0 \text{ dB} \rightarrow$ asymptôte horizontale d'équation $G_{dB}(x) = 0$

- La phase devient : $\varphi(x) \simeq 0$

Courbe de gain :

À la lumière de l'étude asymptotique faite ci-dessus, on trace sur la figure 1.12 la courbe réelle ainsi que la courbe asymptotique, en représentation logarithmique, relatives au gain en décibels du filtre passe-haut d'ordre 1 étudié.

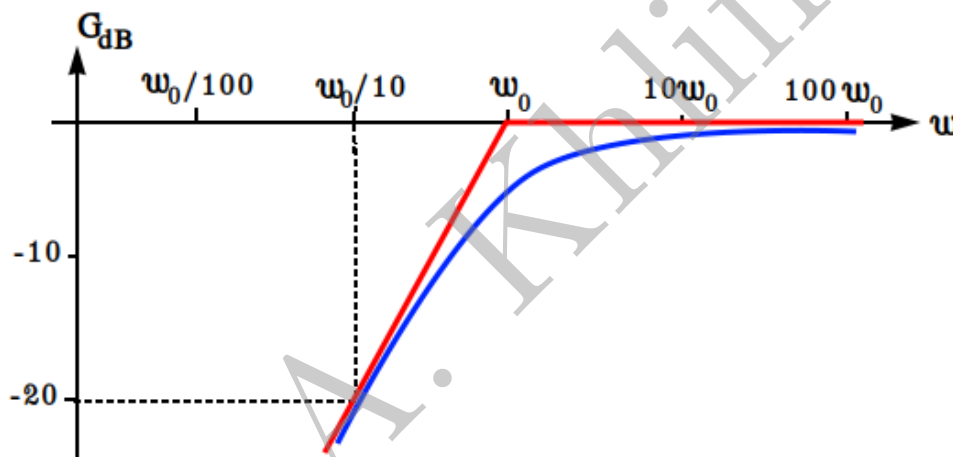


Figure 1.12 – Courbe de gain du filtre passe-haut d'ordre 1 : courbe asymptotique en rouge et courbe réelle en bleu.

d- Comportement dérivateur du filtre

Dans le cas particulier où la pulsation ω du signal d'entrée $V_e(t)$ est très faible ($\omega \ll \omega_0$, i.e. $x \ll 1$), la fonction de transfert 1.7 du filtre passe-bas se ramène à :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} \simeq j\omega/\omega_0$$

Soit encore,

$$V_s = \frac{1}{\omega_0} \cdot j\omega V_e = \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{dV_e(t)}{dt}$$

On en déduit qu'aux faibles fréquences, le filtre passe-haut d'ordre 1 se comporte comme un

circuit dérivateur. Pour illustrer ce point, nous avons représenté sur la figure 1.13 la tension de sortie $V_s(t)$ obtenue à travers ce filtre pour un signal d'entrée $V_e(t)$ triangulaire dont l'harmonique fondamentale est de pulsation ω_e .

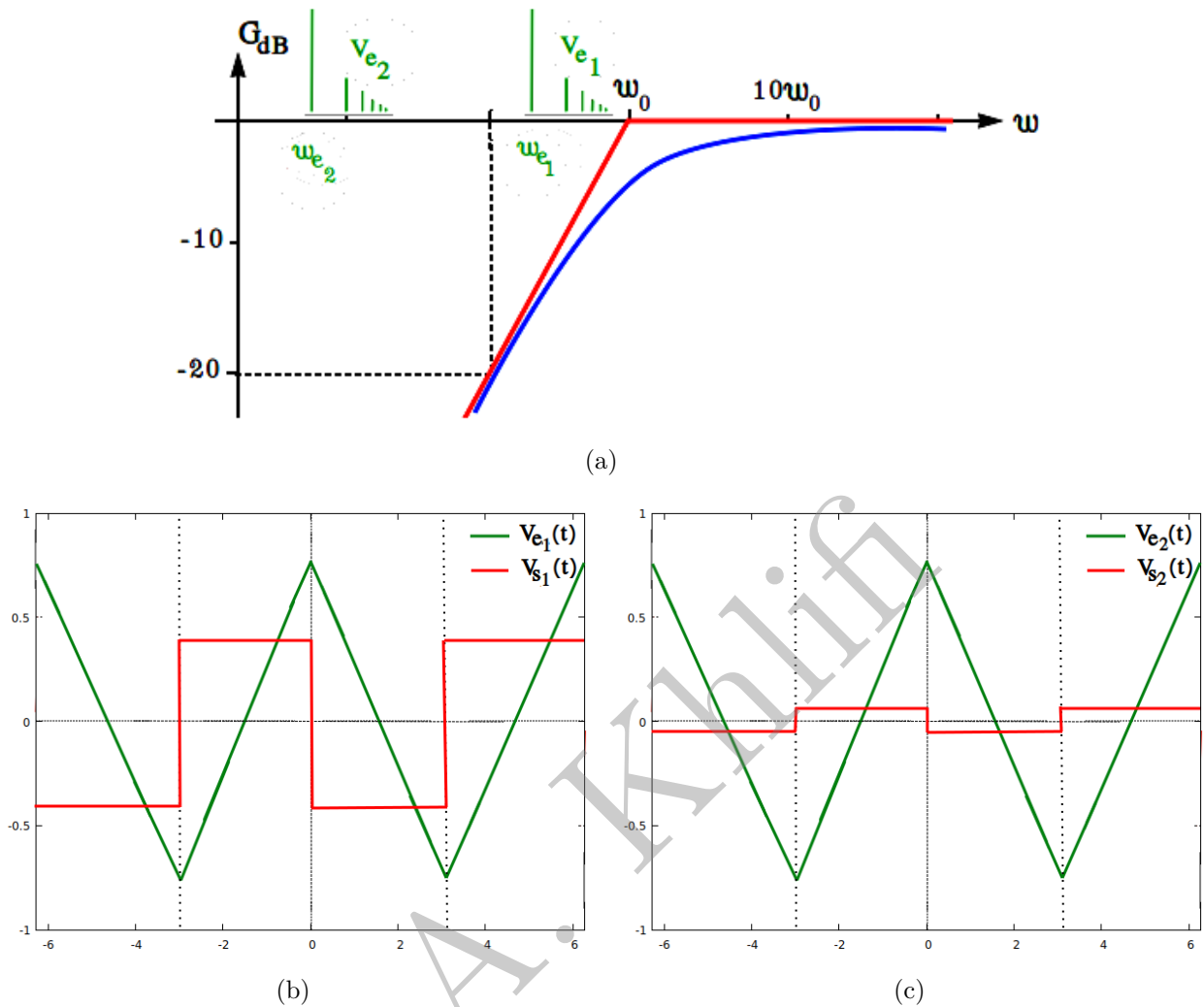


Figure 1.13 – Action d'un filtre passe-haut d'ordre 1 sur un signal triangulaire dont l'harmonique fondamentale est de pulsation ω_e

II.1.3 Filtre passe-bas d'ordre 2

On considère le circuit de la figure 1.14 ci-contre constitué d'une association en série d'une résistance R , d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C . Le circuit est alimenté par une tension d'entrée sinusoïdale $V_e(t)$ et la tension de sortie $V_s(t)$ est mesurée aux bornes du condensateur.

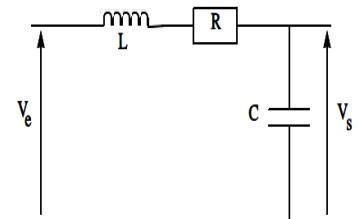


Figure 1.14

a- Comportement basses/hautes fréquences

Si le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert aux basses fréquences et

comme un fil conducteur aux hautes fréquences, la bobine (d'inductance complexe $Z_L = jL\omega$) se comporte inversement : elle est équivalente à un fil conducteur quand $\omega \rightarrow 0$ ($Z_L \rightarrow 0$) et elle est équivalente à un interrupteur ouvert quand $\omega \rightarrow \infty$ ($Z_L \rightarrow \infty$). Par conséquent, le circuit de la figure 1.14 se comporte différemment aux basses et aux hautes fréquences comme c'est illustré sur la figure 1.15 ci-bas.

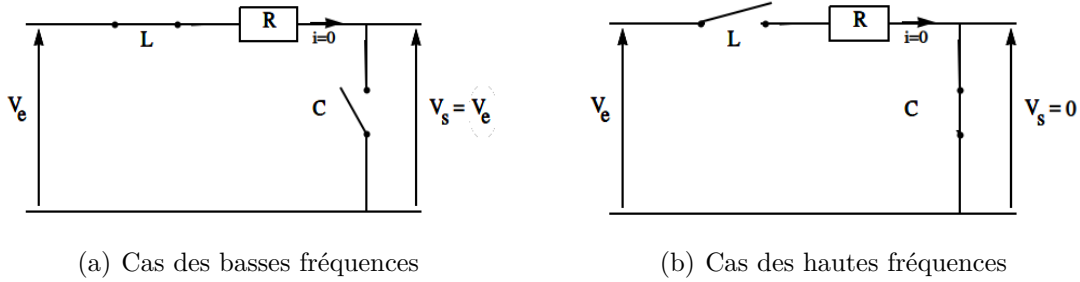


Figure 1.15 – *Comportement du circuit en fonction de la fréquence*

Il s'en suit alors immédiatement que le circuit s'agit bien d'un filtre passe-bas.

b- Fonction de transfert

En notation complexe, moyennant un diviseur de tension, la fonction de transfert du circuit de la figure 1.14 s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \underline{H}(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} &= \frac{Z_C}{Z_C + Z_L + Z_R} \\
 &= \frac{1/jC\omega}{1/jC\omega + jL\omega + R} \\
 &= \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}
 \end{aligned}$$

Finalement, en introduisant la pulsation propre $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$ et le facteur de qualité $Q = \frac{1}{R}\sqrt{L/C}$ (ou, alternativement, le coefficient d'amortissement $m = \frac{1}{2Q} = \frac{R}{2}\sqrt{C/L}$), la fonction de transfert du circuit se ramène à :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2} = \frac{1}{1 + j2mx - x^2} \quad (1.10)$$

La fonction de transfert présente des termes en $x^2 \rightarrow$ le filtre est alors d'ordre 2.

c- Diagramme de bode

- Le gain en décibels est :

$$\begin{aligned} G_{dB}(x) &= 20 \log(|\underline{H}(jx)|) \\ &= -20 \log \sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}} \end{aligned} \quad (1.11)$$

- La phase est :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \arg(\underline{H}(jx)) \\ &= -\arctg\left(\frac{x/Q}{1-x^2}\right) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Étude asymptôtique :

Aux basses fréquences : $\omega \ll \omega_0$ ou encore $x \rightarrow 0$, il vient alors que :

- Le gain en décibels devient : $G_{dB}(x) \simeq 0 \text{ dB} \rightarrow$ asymptôte horizontale d'équation $G_{dB}(x) = 0$
- La phase devient : $\varphi(x) \simeq 0$

Aux hautes fréquences : $\omega \gg \omega_0$ ou encore $x \rightarrow \infty$, il vient alors que :

- Le gain en décibels devient : $G_{dB}(x) \simeq -20 \log(\sqrt{x^4}) = -40 \log(x) \rightarrow$ asymptôte oblique de pente -40 dB/décade
- La phase devient : $\varphi(x) \simeq -\pi$

Courbe de gain :

En s'appuyant sur l'étude asymptôtique faite ci-dessus, on trace sur la figure 1.16 -pour différentes valeurs du facteur de qualité Q - la courbe asymptôtique ainsi que les courbes réelles, en représentation logarithmique, relatives au gain en décibels du filtre passe-bas d'ordre 2 étudié.

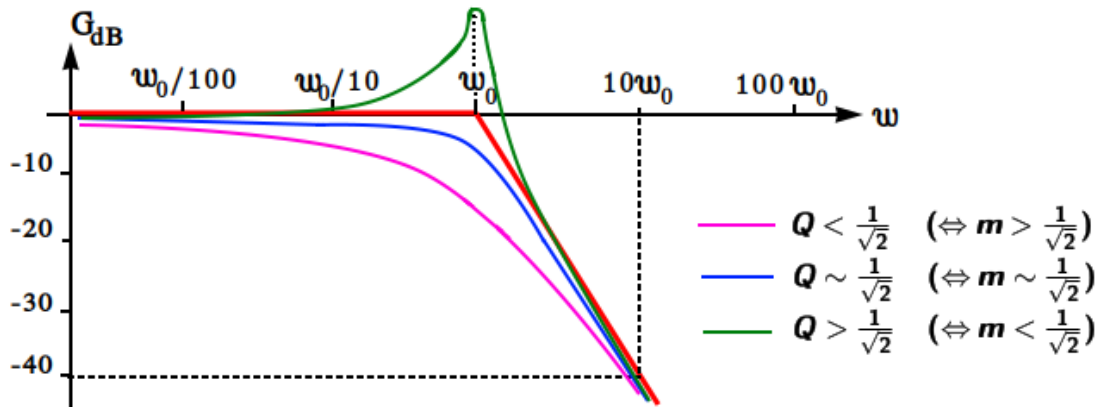


Figure 1.16 – Courbe de gain du filtre passe-bas d'ordre 2 : la courbe rouge est la courbe asymptôtique. La valeur positive du gain en décibels pour $Q > 1/\sqrt{2}$ est due à un phénomène de surtension suite à la résonance.

d- Phénomène de résonance

On a :

$$\begin{aligned} |V_s| = |\underline{H}(j\omega)| \cdot |V_e| &= \frac{|V_e|}{\sqrt{(x^2 - 1)^2 + x^2/Q^2}} \\ &= \frac{|V_e|}{\sqrt{(X - 1)^2 + X/Q^2}} \end{aligned}$$

Où, pour des raisons de simplification, on a posé $X = x^2 = (\omega/\omega_0)^2$.

La tensions de sortie $|V_s|$ est maximale si la fonction au dénominateur $f(X) = (X - 1)^2 + X/Q^2$ est minimale, soit alors :

$$\begin{aligned} \frac{df(X)}{dX} &= 2(X - 1) + \frac{1}{Q^2} = 0 \\ \Rightarrow X &= 1 - \frac{1}{2Q^2} \end{aligned}$$

Du coup, comme $X = x^2 \geq 0$, on tire immédiatement que la condition de résonance est :

$$Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{1}{2Q} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

II.1.4 Filtre passe-bande d'ordre 2

On considère le circuit de la figure 1.17 ci-contre constitué d'une association en série d'une résistance R , d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C . Le circuit est alimenté par une tension d'entrée sinusoïdale $V_e(t)$ et la tension de sortie $V_s(t)$ est mesurée cette fois aux bornes de la résistance.

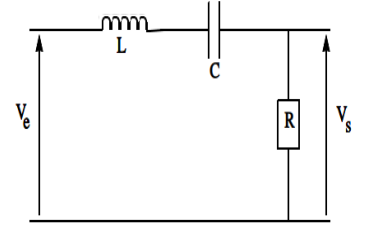


Figure 1.17

a- Fonction de transfert

Moyennant toujours un diviseur de tension, la fonction de transfert du filtre de la figure 1.17 s'écrit :

$$\begin{aligned} H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} &= \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + (\underline{Z}_L + \underline{Z}_C)} \\ &= \frac{R}{R + jL\omega + 1/jC\omega} \\ &= \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} \end{aligned}$$

En introduisant la pulsation propre $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$ et le facteur de

qualité $Q = \frac{1}{R}\sqrt{L/C}$ (ou, alternativement, le coefficient d'amortissement $m = \frac{1}{2Q} = \frac{R}{2}\sqrt{C/L}$), la fonction de transfert du circuit se ramène à :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j2m\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j2m\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{j\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{j\frac{x}{Q}}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2} \quad (1.13)$$

Ou encore plus simplement :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \quad (1.14)$$

La fonction de transfert présente des termes en $x^2 \rightarrow$ le filtre est alors d'ordre 2.

b- Diagramme de bode

- Le gain en décibels est :

$$\begin{aligned} G_{dB}(x) &= 20 \log(|\underline{H}(jx)|) \\ &= -20 \log \sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2} \end{aligned} \quad (1.15)$$

- La phase est :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \arg(\underline{H}(jx)) \\ &= -\arctg\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Étude asymptotique :

Aux basses fréquences : $\omega \ll \omega_0$ ou encore $x \rightarrow 0$, il vient alors que :

- Le gain en décibels devient : $G_{dB} \simeq 20 \log x - 20 \log Q \rightarrow$ asymptôte oblique de pente $+20dB/décade$

- La phase devient : $\varphi(x) \simeq +\pi/2$

Aux hautes fréquences : $\omega \gg \omega_0$ ou encore $x \rightarrow \infty$, il vient alors que :

- Le gain en décibels devient : $G_{dB} \simeq -20 \log x - 20 \log Q \rightarrow$ asymptôte oblique de pente $-20dB/décade$

- La phase devient : $\varphi(x) \simeq -\pi/2$

Courbe de gain :

Moyennant l'étude asymptotique faite ci-dessus, on trace sur la figure 1.18 -pour différentes valeurs du facteur de qualité Q - la courbe asymptotique ainsi que les courbes réelles, en représentation

logarithmique, relatives au gain en décibels du filtre passe-bande d'ordre 2 étudié.

Il est à noter que pour $\omega = \omega_0$ les deux asymptôtes se coupent à la valeur $G_{dB} = -20 \log Q$.

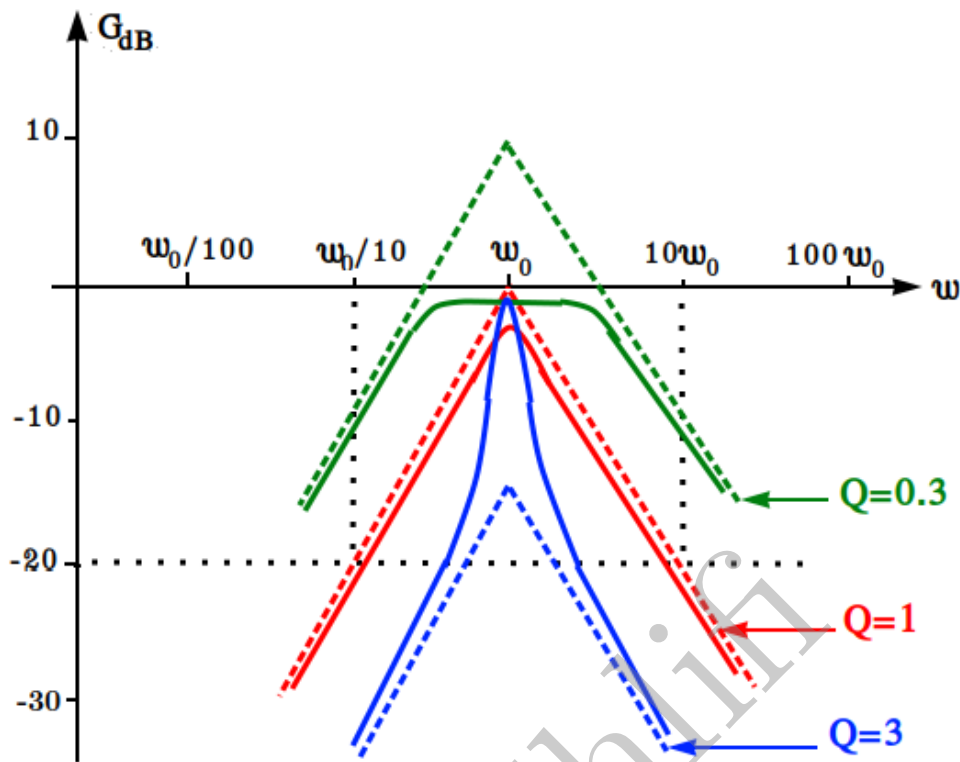


Figure 1.18 – Courbe de gain du filtre passe-bande d'ordre 2 : les courbes en traits discontinus sont les courbes asymptotiques tandis que les courbes en traits pleins sont les courbes réelles. Pour le cas $Q = 3$ un phénomène de résonance a lieu.

c- Pulsations de coupure

Pour la pulsation de coupure ω_c (ou encore pour $x = x_c = \omega_c/\omega_0$) on a vu que $|\underline{H}(j\omega_c)| = |\underline{H}|_{max}/\sqrt{2}$, soit encore :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x_c - \frac{1}{x_c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

il vient alors que : $\left(x_c - \frac{1}{x_c}\right)^2 = \frac{1}{Q^2} \rightarrow x_c - \frac{1}{x_c} = \pm \frac{1}{Q} \rightarrow \boxed{x_c^2 - 1 = \pm \frac{x_c}{Q}}$ Ainsi, deux équations du second degré sont à résoudre :

$$\boxed{x_c^2 + \frac{x_c}{Q} - 1 = 0}$$

ou

$$\boxed{x_c^2 - \frac{x_c}{Q} - 1 = 0}$$

$$\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4 = \frac{1}{Q^2} (1 + 4Q^2)$$

$$\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4 = \frac{1}{Q^2} (1 + 4Q^2)$$

d'où :

- $x_{c_1} = \frac{1}{2Q} (1 + \sqrt{1 + 4Q^2}) > 0$
- $x_{c_2} = \frac{1}{2Q} (1 - \sqrt{1 + 4Q^2}) < 0$

d'où :

- $x'_{c_1} = \frac{1}{2Q} (-1 + \sqrt{1 + 4Q^2}) > 0$
- $x'_{c_2} = \frac{1}{2Q} (-1 - \sqrt{1 + 4Q^2}) < 0$

On ne retient que les solutions positives (x_{c_1} et x'_{c_1}) d'où on obtient finalement la pulsation de coupure basse ω_{c_b} (associée à x'_{c_1}) et la pulsation de coupure haute ω_{c_h} (associée à x_{c_1}) suivantes :

$$\boxed{\omega_{c_b} = \frac{\omega_0}{2Q} (-1 + \sqrt{1 + 4Q^2}) \quad \text{et} \quad \omega_{c_h} = \frac{\omega_0}{2Q} (1 + \sqrt{1 + 4Q^2})}$$

On retrouve immédiatement que la largeur $\Delta\omega$ de la bande passante est inversement proportionnelle au facteur de qualité Q :

$$\boxed{\Delta\omega = \omega_{c_h} - \omega_{c_b} = \frac{\omega_0}{Q}}$$

Plus le filtre est de bonne qualité (Q élevé) plus sa bande passante est étroite ($\Delta\omega$ est petite) et plus il est sélectif.

II.2 Les filtres actifs

II.2.1 Rappel : Théorème de Millman

Il est aussi dit «*loi des noeuds en terme de potentiels*» et il stipule qu'en un noeud A le potentiel V_A est donné par :

$$V_A = \frac{\sum_k G_k \cdot (U_k + \varepsilon_k E_k) + \varepsilon'_k I_k}{\sum_k G_k}$$

Où : $G_k = 1/Z_k$ désigne la conductance du dipôle d'indice k et $\varepsilon_k = \pm 1$ et $\varepsilon'_k = \pm 1$ selon l'orientation relative de générateur de tension et/ou de courant.

À titre d'illustration, le potentiel au point A représenté sur la figure 1.19 s'écrit :

$$V_A = \frac{G_1 U_1 + G_2 (U_2 + E_2) + G_3 (U_3 - E_3) + I_4 - I_5 + G_5 U_5}{G_1 + G_2 + G_3 + G_5}$$

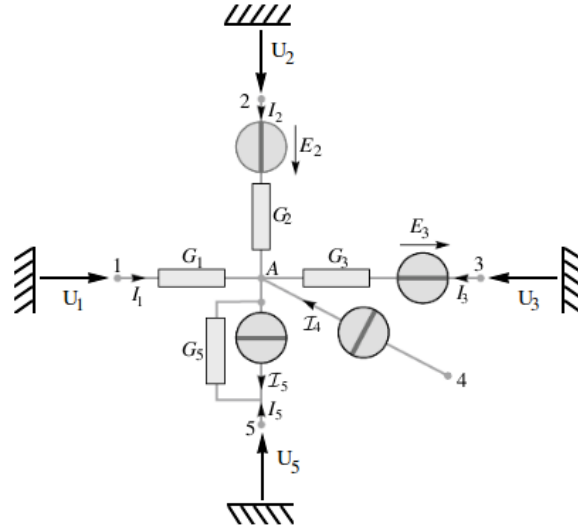


Figure 1.19

II.2.2 L'amplificateur opérationnel

L'amplificateur opérationnel est un composant dit *actif*. Il est capable de fournir à sa sortie, une tension V_s directement reliée à la différence $\epsilon = u_+ - u_-$ des deux tensions à ses bornes : u_+ à la borne non inverseuse et u_- à la borne inverseuse (voir figure 1.20).

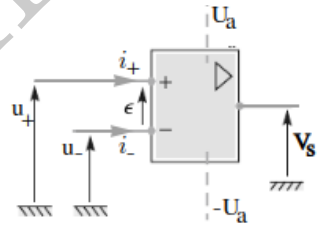


Figure 1.20

Pour fonctionner, un amplificateur opérationnel doit être relié (on dit aussi polarisé) à deux sources stationnaires délivrant deux tensions d'alimentation constantes et symétriques $+U_a$ et $-U_a$. Il en résulte que la tension à la sortie de l'amplificateur est toujours limitée en amplitude selon la relation :

$$-U_{sat} \leq V_s \leq U_{sat}$$

où U_{sat} est légèrement inférieure à la tension d'alimentation U_a .

Dans ce cours on ne s'intéressera qu'au modèle de l'amplificateur opérationnel idéal lequel s'appuie sur les hypothèses suivantes :

- Une impédance d'entrée infinie (par rapport aux impédances utilisées dans le circuit) ce qui implique que les intensités des courants d'entrée i_+ et i_- sont nulles.
- Une impédance de sortie nulle (comparée aux impédances utilisées dans le circuit).
- Un facteur d'amplification infini ce qui implique une différence de potentiel $\epsilon = u_+ - u_-$ nulle aux bornes de l'amplificateur : $\epsilon = 0$.

II.2.3 Filtre actif du premier ordre : exemple du filtre passe-bas

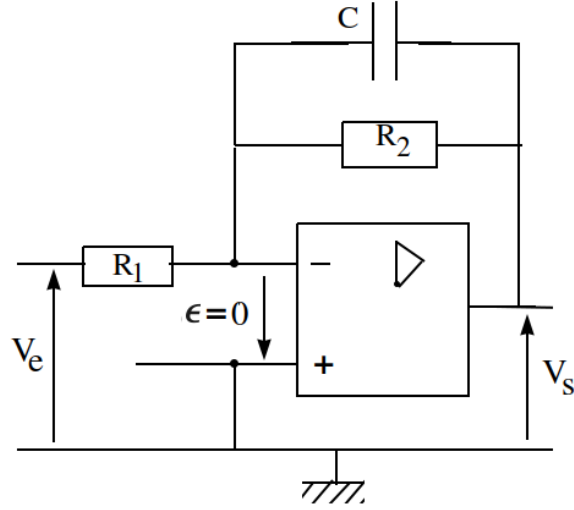


Figure 1.21 – Filtre passe-bas actif d'ordre 1

On considère le circuit de la figure 1.21. On se propose d'établir la fonction de transfert de ce filtre, pour cela on va utiliser le théorème de Millman.

a- Fonction de transfert

L'entrée non inverseuse de l'amplificateur est reliée à la masse, d'où le potentiel est nul à cette borne : $V_+ = 0$.

Moyennant le théorème de Millman on peut écrire l'expression du potentiel V_- à l'entrée inverseuse de l'amplificateur comme suit :

$$\begin{aligned} V_- &= \frac{V_e/Z_{R_1} + V_s/(Z_{R_2} \parallel Z_C)}{1/Z_{R_1} + 1/(Z_{R_2} \parallel Z_C)} \\ &= \frac{V_e/R_1 + V_s \cdot (1/R_2 + jC\omega)}{1/R_1 + 1/R_2 + jC\omega} \end{aligned}$$

L'amplificateur étant idéal $\epsilon = 0 \rightarrow V_- = V_+ = 0$, il s'en suit alors que :

$$V_e/R_1 + V_s \cdot (1/R_2 + jC\omega) = 0$$

Par conséquent, la fonction de transfert du circuit de la figure 1.21 s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} &= \frac{-1/R_1}{1/R_2 + jC\omega} \\ &= \frac{-R_2/R_1}{1 + jR_2C\omega} \end{aligned}$$

En posant $A_0 = -R_2/R_1$, $\omega_0 = 1/R_2C$ et $x = \omega/\omega_0$ il vient finalement que :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A_0}{1 + jx} \quad (1.17)$$

b- Diagramme de Bode

- Le gain en décibels est :

$$\begin{aligned} G_{dB}(x) &= 20 \log (|\underline{H}(jx)|) \\ &= 20 \log |A_0| - 20 \log \sqrt{1 + x^2} \end{aligned} \quad (1.18)$$

- La phase est :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \arg(\underline{H}(jx)) \\ &= \arg(A_0) - \arctg(x) \\ &= \pi - \arctg(x) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Étude asymptotique :

Aux basses fréquences : $\omega \ll \omega_0$ ou encore $x \rightarrow 0$, il vient alors que :

- Le gain en décibels devient : $G_{dB}(x) \simeq 20 \log |A_0| \rightarrow$ asymptôte horizontale d'équation $G_{dB}(x) = 20 \log |A_0|$
- La phase devient : $\varphi(x) \simeq \pi$

Aux hautes fréquences : $\omega \gg \omega_0$ ou encore $x \rightarrow \infty$, il vient alors que :

- Le gain en décibels devient : $G_{dB}(x) \simeq 20 \log |A_0| - 20 \log x \rightarrow$ asymptôte oblique de pente $-20dB/décade$
- La phase devient : $\varphi(x) \simeq \pi/2$

II.2.4 Filtre actif du second ordre : structure de Rauch et structure de Sallen et Key

Pour les filtres actifs de second ordre, plusieurs structures existent, deux seront utilisées dans ce cours, à savoir la structure de Rauch et celle de Sallen et Key. Une étude générale des deux structures permettra par la suite de déduire les différents types de filtres.

a- Structure de Rauch

Un filtre à structure de Rauch est représenté sur la figure 1.22 ci-bas.

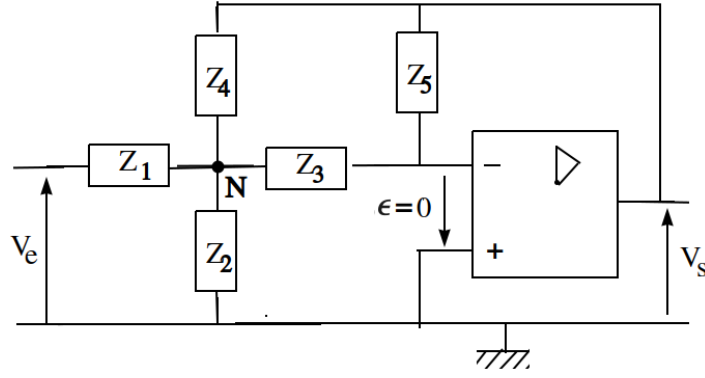


Figure 1.22 – Structure de Rauch

Où $Z_i = Z_R, Z_C$ ou Z_L .

Fonction de transfert :

Afin de calculer la fonction de transfert de cette structure, on a besoin d'appliquer le théorème de Millman dans deux noeuds :

- À l'entrée inverseuse :

$$V_- = \frac{V_N/Z_3 + V_s/Z_5}{1/Z_3 + 1/Z_5} \quad (a)$$

- Au noeud N :

$$V_N = \frac{V_e/Z_1 + V_-/Z_3 + V_s/Z_4}{1/Z_1 + 1/Z_2 + 1/Z_3 + 1/Z_4} \quad (b)$$

En outre, l'entrée non inverseuse de l'amplificateur est reliée à la masse donc : $V_+ = 0$.

D'autre part, l'amplificateur est idéal c'est-à-dire $V_- = V_+$ donc, d'après (a) : $V_N/Z_3 + V_s/Z_5 = 0$, d'où :

$$V_N = -\frac{Z_3}{Z_5} V_s \quad (c)$$

(b) et (c) font alors que :

$$-\frac{Z_3}{Z_5} V_s = \frac{V_e/Z_1 + V_s/Z_4}{1/Z_1 + 1/Z_2 + 1/Z_3 + 1/Z_4}$$

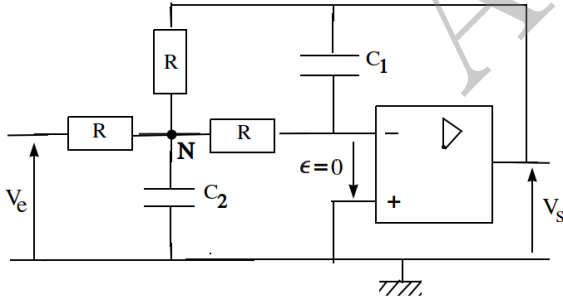
en réduisant au même dénominateur il vient que :

$$\begin{aligned}
 \longrightarrow -\frac{Z_3}{Z_5} \cdot V_s &= \frac{\frac{V_e}{Z_1} + \frac{V_s}{Z_4}}{\frac{Z_2 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_3}{Z_1 Z_2 Z_3 Z_4}} \\
 \longrightarrow -\frac{Z_3}{Z_5} \cdot \frac{Z_2 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_3}{Z_1 Z_2 Z_3 Z_4} \cdot V_s &= \frac{V_e}{Z_1} + \frac{V_s}{Z_4} \\
 \longrightarrow -V_s \cdot \left(\frac{1}{Z_4} + \frac{Z_3}{Z_5} \cdot \frac{Z_2 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_3}{Z_1 Z_2 Z_3 Z_4} \right) &= \frac{V_e}{Z_1} \\
 \longrightarrow -V_s \cdot \left(\frac{Z_2 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_5}{Z_1 Z_2 Z_3 Z_4} \right) &= \frac{V_e}{Z_1} \\
 \longrightarrow \frac{V_s}{V_e} &= \frac{Z_2 Z_4 Z_5}{Z_1 Z_2 (Z_3 + Z_4 + Z_5) + Z_3 Z_4 (Z_2 + Z_4)}
 \end{aligned}$$

Finalement, la fonction de transfert associée à la structure de Rauch de la figure 1.22 s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{Z_2 Z_4 Z_5}{Z_1 Z_2 (Z_3 + Z_4 + Z_5) + Z_3 Z_4 (Z_2 + Z_4)} \quad (1.20)$$

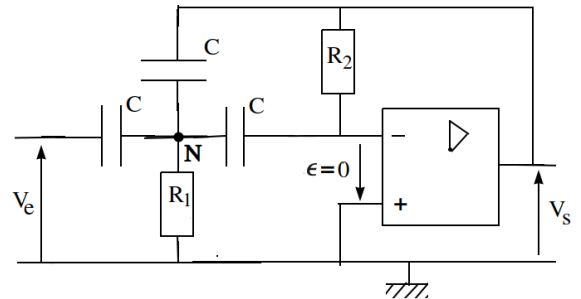
Exemples :



(a) Filtre actif passe-bas :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{-1}{1 + j \frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

($Q = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}$, $\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1 \cdot C_2}}$)



(b) Filtre actif passe-haut :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 + j \frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

($Q = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$, $\omega_0 = \frac{1}{C\sqrt{R_1 \cdot R_2}}$)

Figure 1.23 – Filtres actifs de second ordre à structure de Rauch.

b- Structure de Sallen et Key

Un filtre à structure de Sallen et Key est représenté sur la figure 1.24 ci-bas.

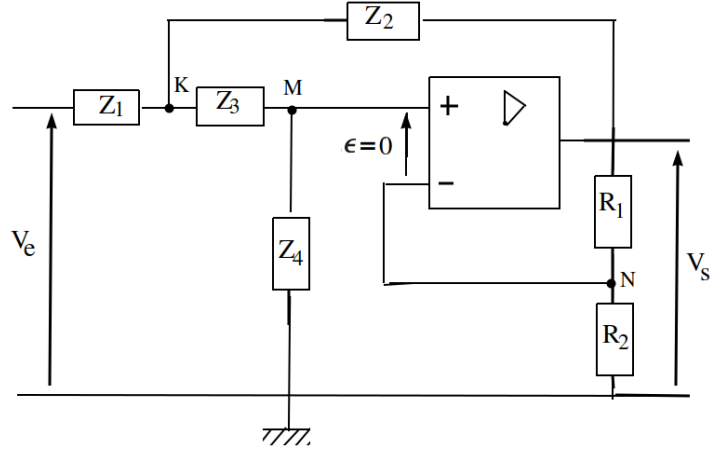


Figure 1.24 – Structure de Sallen et Key

Où $Z_i = Z_R, Z_C$ ou Z_L .

Fonction de transfert :

Appliquons le théorème de Millman :

- Au noeud K :

$$V_K = \frac{V_e/Z_1 + V_s/Z_2 + V_M/Z_3}{1/Z_1 + 1/Z_2 + 1/Z_3} \quad (a)$$

- Au noeud M :

$$V_M = \frac{V_K/Z_3}{1/Z_3 + 1/Z_4} \quad (b)$$

De la relation (b) on peut tirer : $V_K = \frac{1/Z_3 + 1/Z_4}{1/Z_3} V_M$. Comme $V_M = V_+$ il vient alors que :

$$V_K = \frac{V_e/Z_1 + V_s/Z_2 + V_+/Z_3}{1/Z_1 + 1/Z_2 + 1/Z_3} = \frac{1/Z_3 + 1/Z_4}{1/Z_3} V_+ \quad (c)$$

D'un autre coté, la tension V_- à l'entrée non inverseuse est égale à la tension au noeud N . En appliquant un diviseur de tension en N on obtient :

$$V_N = V_- = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_s \quad (d)$$

Comme l'amplificateur est idéal $V_+ = V_-$, il s'en suit alors en remplaçant (d) dans (c) :

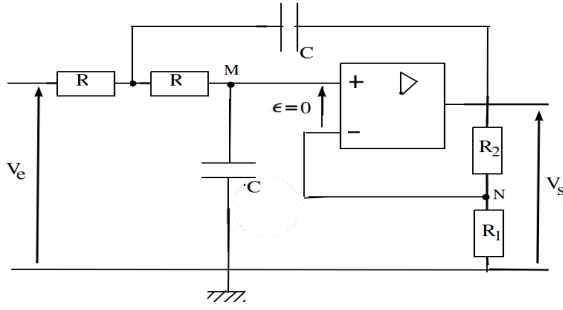
$$\frac{V_e/Z_1 + V_s/Z_2 + \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} V_s\right)/Z_3}{1/Z_1 + 1/Z_2 + 1/Z_3} = \frac{1/Z_3 + 1/Z_4}{1/Z_3} \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} V_s\right)$$

En posant $K_A = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$ pour simplifier les notations, on peut montrer que l'expression de la

fonction de transfert se ramène finalement à :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = K_A \cdot \frac{1/(Z_1 Z_3)}{(1/Z_1 + 1/Z_2) \cdot (1/Z_3 + 1/Z_4) + 1/Z_3 (1/Z_4 - K_A/Z_2)}$$

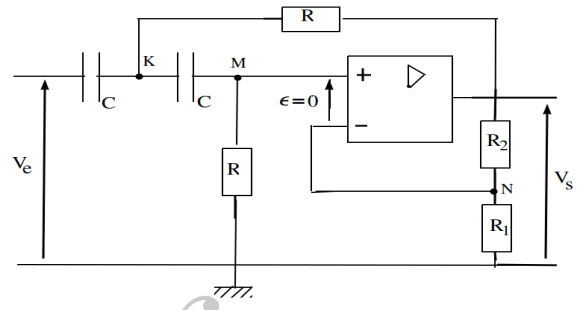
Exemples :



(a) Filtre actif passe-bas :

$$\underline{H}(j\omega) = K_A \cdot \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{Q\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

($Q = \frac{1}{3-K_A}$, $\omega_0 = \frac{1}{RC}$)



(b) Filtre actif passe-haut :

$$\underline{H}(j\omega) = K_A \cdot \frac{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + j \frac{\omega}{Q\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

($Q = \frac{1}{3-K_A}$, $\omega_0 = \frac{1}{RC}$)

Figure 1.25 – Filtres actifs de second ordre à structure de Sallen et Key.

III Électronique numérique

III.1 Signaux numériques

Contrairement aux signaux analogiques continus (comme un courant ou une tension aux bornes d'un dipôle) les signaux numériques sont des signaux discontinus en temps et en amplitude, c'est-à-dire qu'ils prennent des valeurs numériques bien discrètes à des instants séparés. De tels signaux sont généralement exprimés en **bits** (**binary units** en anglais), entre autre, en fonction de 0 et 1.

L'opération de transformation d'un signal analogique en un signal numérique (CAN) est appelée *numérisation*. On procède à la numérisation quand on veut, par exemple, stocker un signal (un son, une image, etc), le dupliquer, le compresser ou encore mélanger des signaux de natures différentes sur le même support.

Les avantages de la numérisation sont multiples, à savoir, la faible sensibilité au bruit du signal numérique, la simplicité de son traitement (enregistrement, transmission et régénération), l'universalité de son transfert c'est-à-dire son indépendance de la nature physique du signal initial.

III.2 Conversion analogique numérique (CAN)

Conceptuellement, la conversion analogique-numérique peut être divisée en trois étapes : l'échantillonnage temporel, le blocage et enfin la quantification (figure 1.26). Le signal quantifié ainsi obtenu peut finalement être stocké sur un support en vue de son traitement.

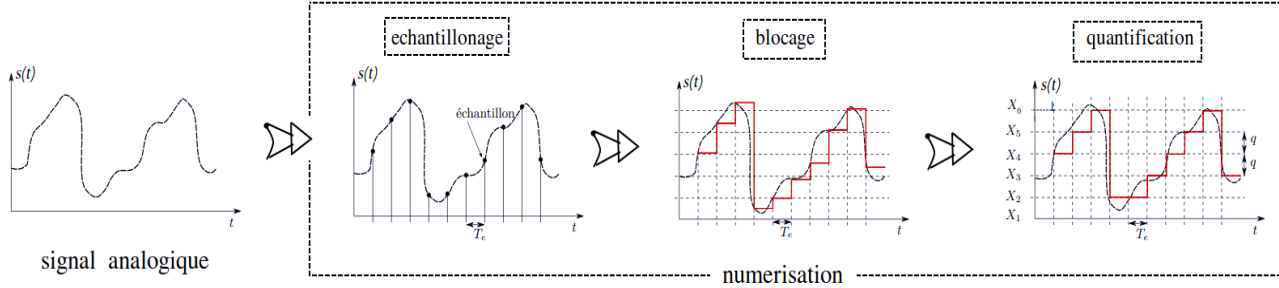


Figure 1.26 – Chaîne de numérisation d'un signal analogique

III.2.1 Échantillonnage

L'échantillonnage d'un signal analogique $s(t)$ consiste à prendre périodiquement de ce signal un ensemble d'échantillons numériques $s(t_n = n.T_e)$ aux instants $t_n = n.T_e$ où n est un entier et T_e est appelée *période d'échantillonnage*.

Autrement, il s'agit de multiplier le signal analogique $s(t)$ par un train d'impulsions périodiques (*i.e.* la fonction peigne de Dirac $f(t)$) comme c'est illustré sur la figure 1.27 ci-bas.

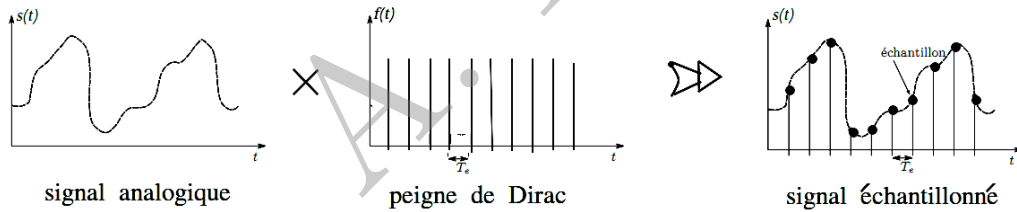


Figure 1.27 – Échantillonnage d'un signal analogique

a) Choix de la fréquence d'échantillonnage : théorème de Shannon-Nyquist

Ce théorème stipule que pour pouvoir reconstituer, sans perte d'information, un signal continu $s(t)$ à partir d'un train d'échantillons de période T_e , il faut que la fréquence d'échantillonnage $f_e = 1/T_e$ soit supérieure ou égale au double de la fréquence maximale f_{max} contenue dans le spectre du signal $s(t)$:

$$f_e \geq 2.f_{max} \quad (1.21)$$

En effet, d'après Fourier, la peigne de Dirac $f(t)$ (de fréquence $f_e = 1/T_e$) est décomposable en

une somme d'harmoniques dont la fondamentale est de fréquence $f_1 = f_e$:

$$\begin{aligned} f(t) &= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(n \cdot 2\pi f_e t + \varphi_n) \\ &= C_0 + C_1 \cos(2\pi f_e t + \varphi_1) + C_2 \cos(2\pi \cdot 2f_e t + \varphi_2) + C_3 \cos(2\pi \cdot 3f_e t + \varphi_3) + \dots \end{aligned}$$

Pour simplifier, supposons que le signal $s(t)$ qu'on désire échantillonner à la fréquence f_e est une fonction monochromatique de fréquence f_0 :

$$s(t) = S_0 \cos(2\pi f_0 t)$$

Il vient alors que le signal échantillonné, qu'on notera $s_e(t)$, s'écrit :

$$\begin{aligned} s_e(t) = s(t) \times f(t) &= S_0 \cos(2\pi f_0 t) \times [C_0 + C_1 \cos(2\pi f_e t + \varphi_1) \\ &\quad + C_2 \cos(2\pi \cdot 2f_e t + \varphi_2) + C_3 \cos(2\pi \cdot 3f_e t + \varphi_3) + \dots \end{aligned}$$

Sachant que $\cos(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$, il s'en suit alors que :

$$\begin{aligned} s_e(t) &= S_0 C_0 \cos(2\pi f_0 t) + \frac{S_0 C_1}{2} [\cos(2\pi (f_e + f_0)t) + \cos(2\pi (f_e - f_0)t)] \\ &\quad + \frac{S_0 C_2}{2} [\cos(2\pi (2f_e + f_0)t) + \cos(2\pi (2f_e - f_0)t)] \\ &\quad + \frac{S_0 C_3}{2} [\cos(2\pi (3f_e + f_0)t) + \cos(2\pi (3f_e - f_0)t)] + \dots \end{aligned}$$

Par conséquent, le spectre du signal échantillonné $s_e(t)$ est représenté sur la figure 1.28(a) ci-bas :

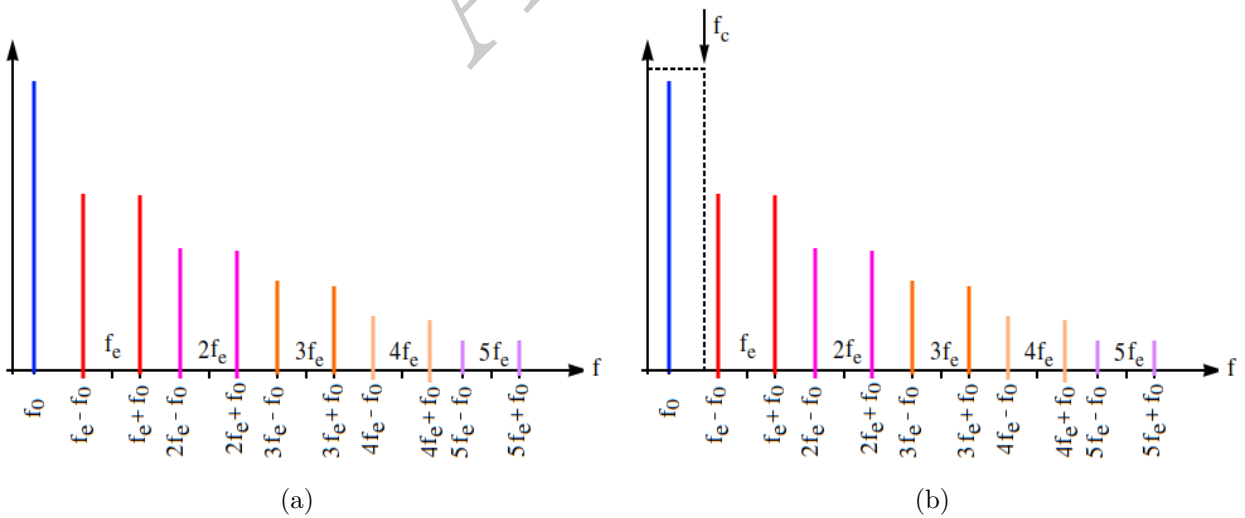


Figure 1.28 – Spectre du signal échantillonné (à la fréquence d'échantillonnage f_e) correspondant à un signal analogique monochromatique de fréquence f_0

Enfin, pour réussir à restituer le signal analogique de départ $s(t)$ il faut utiliser un filtre passe-bas de fréquence de coupure f_c telque : $f_0 \leq f_c \leq f_e - f_0$ (voir figure 1.28(b)). Ceci n'est possible que si : $f_0 \leq f_e - f_0$ ce qui implique que le signal monochromatique $s(t) = S_0 \cos(2\pi f_0 t)$ ne peut être correctement échantillonné à la fréquence f_e que si :

$$f_e \geq 2f_0$$

Plus généralement, pour réussir à restituer l'intégralité d'un signal $s(t)$ quelconque échantillonné à la fréquence f_e , et dont le spectre possède la fréquence maximale f_{max} , il faut restituer toutes ses harmoniques, notamment celle de fréquence f_{max} , d'où le critère de Shannon-Nyquist :

$$f_e \geq 2f_{max}$$

b) Spectre du signal échantillonné et phénomène de repliement spectral

i- Cas d'un signal monochromatique :

Pour un signal de départ monochromatique de fréquence f_0 , si l'échantillonnage est correct (c'est-à-dire $f_e \geq 2f_0$) alors le spectre du signal échantillonné $s_e(t)$ est identique à celui représenté sur la figure 1.28(a).

Le cas échéant, si l'échantillonnage est mauvais (c'est-à-dire $f_e \leq 2f_0$) le spectre du signal échantillonné fait apparaître des fréquences que le signal initial $s(t)$ ne contenait pas (voir figure 1.29). Ces fréquences sont dites *fréquences fantômes*.

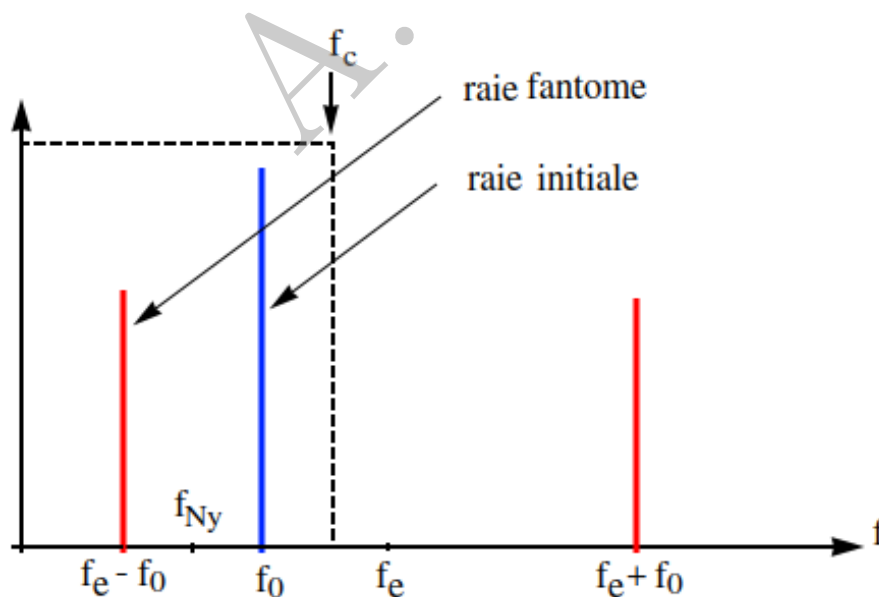


Figure 1.29 – Mauvais échantillonnage : phénomène de repliement spectral

La raie fantôme (de fréquence $f_e - f_0$) est symétrique de la raie monochromatique du signal

initial par rapport à la fréquence $f_{Ny} = f_e/2$ dite fréquence de Nyquist, en effet :

$$\frac{(f_e - f_0) + f_0}{2} = \frac{f_e}{2} \equiv f_{Ny}$$

On parle alors d'un phénomène de *repliement de spectre* par rapport à la fréquence de Nyquist.

ii- Cas d'un signal non périodique (spectre continu) :

Le spectre d'un signal $s(t)$ non périodique est continu de fréquence maximale f_{max} (figure 1.30(a)). Une fois échantillonné correctement avec une fréquence d'échantillonnage qui satisfait le critère de Shannon-Nyquist ($f_e \geq 2f_{max}$), le spectre du signal échantillonné $s_e(t)$ peut être schématisé par la figure 1.30(b). Le cas échéant, si l'échantillonnage est mauvais et $f_e < 2f_{max}$, un phénomène de repliement spectral a lieu de part et d'autre de la fréquence de Nyquist $f_{Ny} = f_e/2$ et des fréquences fantômes inexistantes dans le spectre initial apparaissent (figure 1.30(c)).

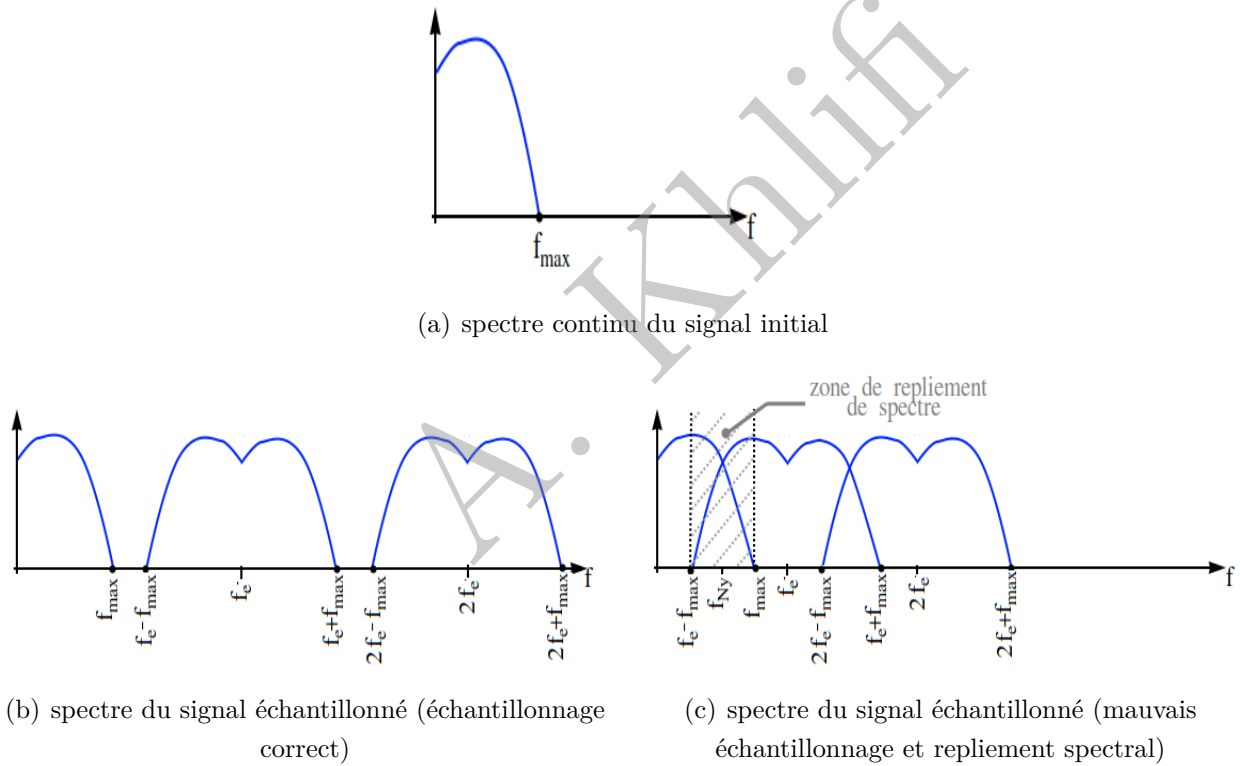


Figure 1.30

Remarque :

Si le signal est périodique son spectre est non borné supérieurement, dans ce cas, on procède à un filtrage passe-bas, appelé *filtrage anti-repliement* avant l'opération de l'échantillonnage. Ceci permet de fixer une fréquence maximale arbitraire dans le spectre et, par la suite, assurer le respect de la condition de Shannon-Nyquist.

III.2.2 Blocage du signal échantillonné

Au cours du codage (3ème étape de la numérisation) il est préférable que le signal d'entrée $s(t)$ ne varie pas d'une quantité supérieure au pas d'échantillonnage q . Pour assurer ceci, la valeur de $s(t)$ est maintenue constante (*i.e.* bloquée) pendant la durée nécessaire au codage.

III.2.3 Quantification

a) Numérotation binaire

En système binaire les nombres sont représentés par une succession de bits (de valeurs 0 et 1). En *base 2* un nombre positif N s'écrit sous la forme :

$$N = {}_2hgfedcba = h \times 2^7 + g \times 2^6 + f \times 2^5 + e \times 2^4 + d \times 2^3 + c \times 2^2 + b \times 2^1 + a \times 2^0$$

À titre d'exemple, le nombre $N = 135$ a pour code binaire $N = {}_210000111$, en effet :

$$135 = 1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 128 + 4 + 2 + 1$$

Remarque :

Il est clair que le nombre de bits choisi pour le codage fixe le nombre maximal de valeurs considérées. En effet, un codage sur 8 bits (appelé octet) permet de représenter $2^8 = 256$ valeurs, tandis qu'un codage sur 16 bits par exemple permet de représenter $2^{16} = 65536$ valeurs.

b) Codage

Au cours d'une conversion analogique-numérique (CAN) à n bits, l'amplitude maximale S_{cc} (crête à crête) du signal analogique est divisée en 2^n intervalles de même largeur q telque :

$$q = \frac{S_{cc}}{2^n}$$

Où S_{cc} représente l'échelle totale de conversion et q le pas de cette conversion.

On peut notamment introduire le pas r de la conversion analogique-numérique défini par :

$$r = \frac{q}{S_{cc}} = \frac{1}{2^n}$$

r ne dépend que du nombre de bits de la conversion.