

Chapitre 1

Induction électromagnétique

I Mise en évidence expérimentale

I.1 Analyse qualitative de quelques expériences

Expérience 1 : *Aimant en translation au dessus d'une spire fixe*

On dispose d'une spire équipée d'un ampermètre et d'un voltmètre, initialement non parcourue par aucun courant et n'est siège d'aucune ddp. Au dessus de cette spire, un aimant est susceptible de se mouvoir verticalement (figure 1.1 ci-contre).

Si l'aimant est immobile rien ne se passe. S'il est en mouvement, deux cas se présentent suivant le sens de ce mouvement :

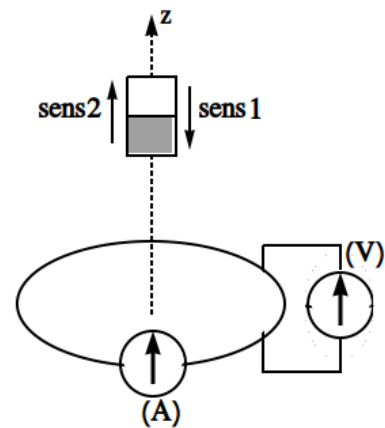


Figure 1.1

1er cas : Déplacement vers le bas de l'aimant

Dans ce cas, on remarque que les aiguilles de l'ampermètre et du voltmètre se dévient indiquant la présence d'un courant et d'une tension dans la spire.

2ème cas : Déplacement vers le haut de l'aimant

Dans ce cas, on remarque aussi que les aiguilles de l'ampermètre et du voltmètre se dévient mais cette fois dans le sens opposé, indiquant ainsi que le courant a changé de sens.

Expérience 2 : Rails de Laplace en présence d'un champ stationnaire

On dispose d'une barre, équipée d'un ampermètre et d'un voltmètre, susceptible de se déplacer sur deux rails horizontaux en présence d'un champ $\vec{B}$ extérieur uniforme et stationnaire (figure 1.2 ci-contre).

Si la barre est immobile rien ne se passe. Si elle est en mouvement, deux cas se présentent suivant le sens du mouvement :

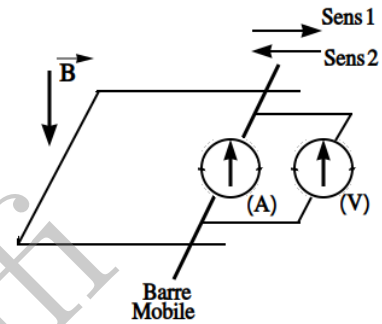


Figure 1.2

1er cas : Déplacement de la barre dans le sens 1

Dans ce cas, on remarque que les aiguilles de l'ampermètre et du voltmètre se dévient indiquant la présence d'un courant et d'une tension dans la barre.

2ème cas : Déplacement de la barre dans le sens 2

Dans ce cas, on remarque aussi que les aiguilles de l'ampermètre et du voltmètre se dévient mais cette fois dans le sens opposé, indiquant ainsi que le courant a changé de sens.

Analyse des observations :

- Dans les deux expériences, l'apparition du courant et de la tension dans le circuit traduit que ce dernier devient siège d'un phénomène d'induction électromagnétique. Le courant $i(t)$ qui apparaît est appelé *courant induit* et la tension -qui sera dans la suite notée $e(t)$ - est appelée *force électromotrice induite* (*f.e.m. induite*).

- Dans les deux expériences, quand l'aimant ou la barre commencent à se mouvoir, la quantité de lignes de champ magnétique traversant la surface du circuit commence à varier au cours du temps : c'est la variation dans le temps du flux $\Phi(t)$ du champ magnétique qui est la cause de l'apparition du phénomène d'induction.

- Lorsque le mouvement est dans le *sens 1* (figures 1.3(a) et 1.4(a)), la quantité des lignes de champ magnétique qui traversent le circuit augmente au cours du temps ($\Phi(t) \nearrow$). Dans ce cas, le courant induit qui apparaît a un sens tel que le champ magnétique induit $\vec{B}_{ind}$ qu'il crée soit de sens opposé à $\vec{B}$.

Par contre, lorsque le mouvement est dans le *sens 2* (figures 1.3(b) et 1.4(b)), la quantité des lignes de champ magnétique qui traversent le circuit diminue au cours du temps ($\Phi(t) \searrow$). Dans ce cas, le courant induit qui apparaît a un sens tel que le champ magnétique induit $\vec{B}_{ind}$ qu'il crée soit de même sens que $\vec{B}$.

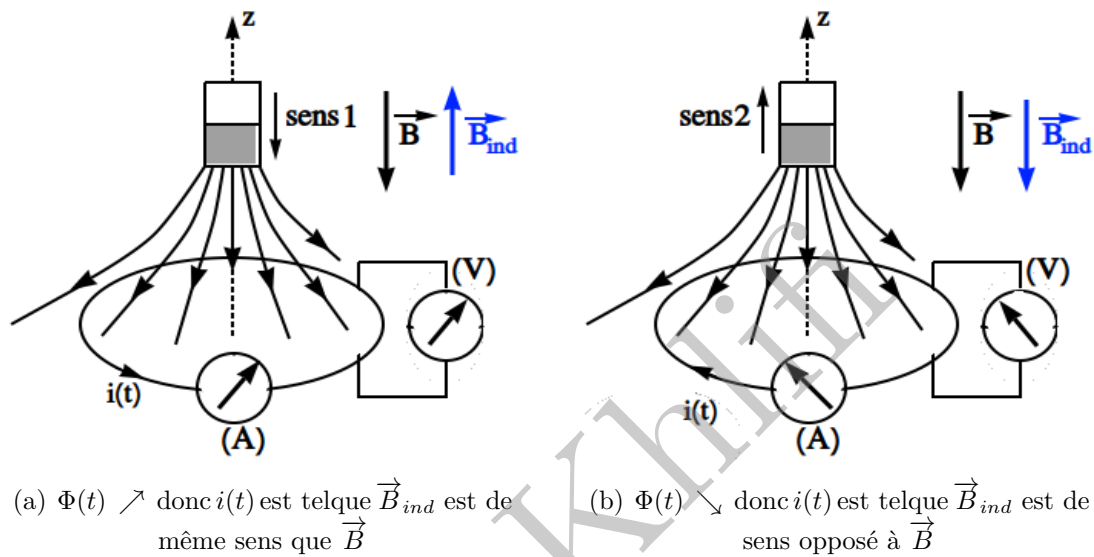


Figure 1.3

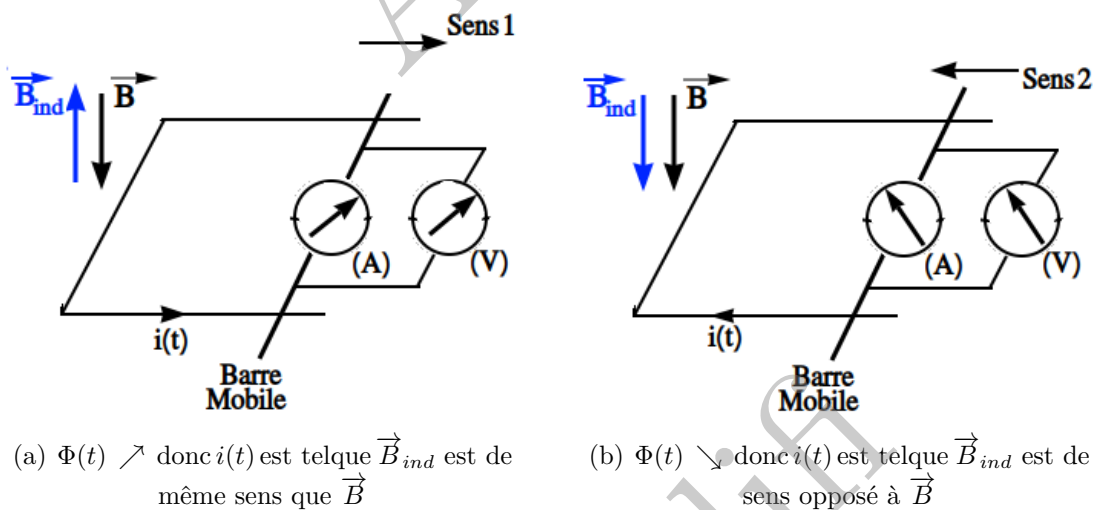


Figure 1.4

I.2 Phénoménologie de l'induction

I.2.1 Loi de Lenz

Énoncé : «L'induction tend par ses effets à s'opposer à la cause qui lui a donnée naissance»

Remarques :

- La cause d'un phénomène d'induction est la variation au cours du temps du flux magnétique $\Phi(t)$, alors que ses effets sont un courant induit $i(t)$, une *f.e.m.* induite $e(t)$, un champ magnétique induit, etc.

- La loi de Lenz peut aussi s'énoncer comme suit : «Le courant induit a un sens tel qu'il s'oppose à la cause qui lui a donné naissance»

I.2.2 Loi de Faraday

Cette loi relie la variation au cours du temps du flux magnétique $\Phi(t)$ dans le circuit à la *f.e.m.* induite $e(t)$ qui y apparaît :

$$e(t) = - \frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (1.1)$$

Remarques :

- Le signe «-» qui apparaît dans la loi de Faraday n'est autre que la traduction de la loi de Lenz.
- Le flux magnétique $\Phi(t)$ à travers la surface S du circuit est :

$$\Phi(t) = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \propto B.S$$

Ainsi, deux cas typiques se présentent pour avoir un flux magnétique variable dans le temps :

1er Cas : Le circuit est fixe ($S = cte$) et le champ magnétique varie dans le temps ($B = B(t)$) $\rightarrow$ on parle dans ce cas d'une *induction de Newman*

2ème Cas : Le circuit est mobile ($S = S(t)$) et le champ magnétique est stationnaire ($B = cte$) $\rightarrow$ on parle dans ce cas d'une *induction de Lorentz*

I.2.3 Schéma électrique équivalent

Un circuit filiforme AB qui subit un phénomène d'induction est siège d'une *fem* induite $e(t)$ et d'un courant induit $i(t)$. Si on désigne par R sa résistance électrique, il vient alors que le circuit AB peut être modélisé par l'association d'un générateur de tension $e(t)$ en série avec une résistance R (figure 1.5 ci-bas).

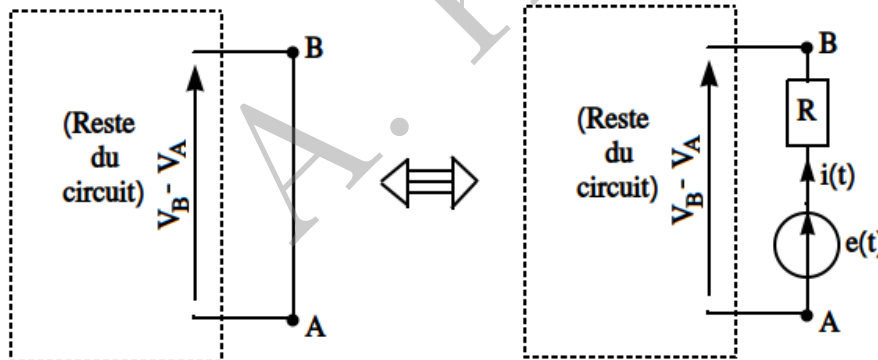


Figure 1.5: Schéma électrique équivalent

L'application d'une loi de maille au sein du circuit équivalent de la figure 1.5 permet enfin d'établir *l'équation électrique* du problème étudié :

$$V_B - V_A = e(t) - Ri(t) \quad (1.2)$$

II Circuit fixe dans un champ variable : induction de Newman

II.1 Phénomène d'auto-induction

Un circuit $\mathcal{C}$ filiforme, fermé et parcouru par un courant i crée en tout point de l'espace un champ magnétique propre $\vec{B}_p(M)$ dont le module $B(M)$ est proportionnel au courant dans ce circuit : $B(M) \propto i$.

Il s'en suit immédiatement que le flux de $\vec{B}_p(M)$ à travers la surface S du circuit $\mathcal{C}$, appelé *flux propre* et noté Φ_p , est à son tour proportionnel à l'intensité du courant i :

$$\Phi_p = \iint_S \vec{B}_p d\vec{S} \propto i$$

On définit alors *le coefficient d'auto-induction* (ou encore *le coefficient d'induction propre*) L par :

$$\Phi_p = \iint_S \vec{B}_p d\vec{S} = L.i \quad (1.3)$$

L s'exprime en Henry (H). Il est toujours positif et ne dépend que de la géométrie du circuit.

Lorsque le flux propre $\Phi_p(t)$ varie au cours du temps, le circuit $\mathcal{C}$ devient siège d'une *fem* d'auto-induction $e_p(t)$ telle que :

$$e_p(t) = -\frac{d\Phi_p(t)}{dt} = -L \frac{di(t)}{dt} \quad (1.4)$$

Remarques :

Si le champ propre $\vec{B}_p(t)$ est le seul champ magnétique présent dans l'espace alors l'équation électrique s'écrit pour une spire simple de résistance R :

$$e_p(t) = Ri(t) \quad \text{soit} \quad -L \frac{di(t)}{dt} = Ri(t)$$

Le cas échéant, si -outre le champ propre $\vec{B}_p(t)$ - un champ magnétique extérieur $\vec{B}_{ext}(t)$ règne dans l'espace alors : $\Phi_{total} = \Phi_p + \Phi_{ext}$, soit alors l'équation électrique suivante pour une spire

simple :

$$\begin{aligned}
 e_{totale}(t) = Ri(t) &\implies -\frac{d\Phi_{total}(t)}{dt} = -\frac{d\Phi_{ext}(t)}{dt} - \frac{d\Phi_p(t)}{dt} = Ri(t) \\
 &\implies e_{ext}(t) + e_p(t) = Ri(t) \\
 &\implies \boxed{e_{ext}(t) - L\frac{di(t)}{dt} = Ri(t)}
 \end{aligned}$$

Application :

Un solénoïde infini comporte n spires jointives par unité de longueur, de rayon a et parcourue chacune par un courant d'intensité $i(t)$.

1) Déterminer l'inductance propre L d'une portion du solénoïde de longueur h . En déduire l'expression de l'inductance par unité de longueur l .

2) Calculer la *fem* induite qui apparaît dans cette portion. En déduire l'équation électrique vérifiée lorsqu'on ferme les extrémités de la tranche. (On notera R sa résistance).

3) On rappelle que la densité volumique d'énergie magnétique e_m s'écrit : $e_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$. En déduire alors l'énergie magnétique totale $\mathcal{E}_m$ emmagasinée dans la portion de longueur h . Retrouver l'expression de L .

→ Corrigé :

1) On sait que le champ magnétique propre créé par un solénoïde infini en tout point intérieur est uniforme et vaut : $\vec{B}_p = \mu_0 ni(t)\vec{e}_z$
Le flux propre de $\vec{B}_p$ à travers la surface d'une seule spire du solénoïde de rayon a est alors :

$$\Phi_p^{(1)} = \mu_0 ni(t) \cdot \pi a^2$$

Le flux propre de $\vec{B}_p$ à travers toute la portion de longueur h (*i.e.* toutes les spires dans cette portion) est égal au nombre de spires N_{sp} multiplié par le flux à travers une seule spire :

$$\Phi_p = N_{sp} \times \Phi_p(1) = nh \times \Phi_p(1) = \mu_0 \pi n^2 a^2 h \cdot i(t)$$

Enfin, l'inductance propre L de la portion du solénoïde se donne par :

$$L = \Phi_p / i(t) = \mu_0 \pi n^2 a^2 h$$

L'inductance propre par unité de longueur l est : $l = \frac{L}{h} = \mu_0 \pi n^2 a^2$ (en $H.m^{-1}$)

2) $e_p(t) = -\frac{d\Phi_p}{dt} = -L\frac{di(t)}{dt}$ l'équation électrique est alors : $e_p(t) - Ri(t) = 0$
soit : $L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0$

3) L'énergie magnétique totale emmagasinée dans la portion du solénoïde est :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m &= \iiint_{\mathcal{V}} e_{em} \cdot d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{B_p^2}{2\mu_0} d\mathcal{V} \\ &= \iiint_{\mathcal{V}} \frac{(\mu_0 n i(t))^2}{2\mu_0} r dr d\theta dz \\ &= \frac{\mu_0 \pi h}{2} n^2 a^2 i^2(t)\end{aligned}$$

Comme : $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} L i^2(t)$ d'où on retrouve l'expression de L :

$$L = \frac{2\mathcal{E}_m}{i^2(t)} = \mu_0 \pi h n^2 a^2$$

II.2 Phénomène d'induction mutuelle

On considère deux circuits $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ filiformes, fermés et parcourus respectivement par les courants i_1 et i_2 .

Chacun des circuits crée en tout point M de l'espace un champ magnétique, $\vec{B}_1(M)$ et $\vec{B}_2(M)$ respectivement, dont les modules sont proportionnels aux courants dans chaque circuit :

$$B_1(M) \propto i_1 \quad \text{et} \quad B_2(M) \propto i_2$$

Pour simplifier, on suppose que les inductances propres L_1 et L_2 des deux circuits sont négligeables, ce qui implique que les flux propres sont faibles dans chacun des circuits.

Il s'en suit alors que le flux Φ_1 à travers la surface S_1 du circuit $\mathcal{C}_1$ s'écrit :

$$\Phi_1 = \Phi_{1_{ext}} = \Phi_{12} = \iint_{S_1} \vec{B}_2 d\vec{S}_1 \propto i_2$$

Soit M_{12} le facteur de proportionnalité, d'où : $\Phi_1 = \Phi_{12} = M_{12} i_2$

De la même manière, le flux Φ_2 à travers la surface S_2 du circuit $\mathcal{C}_2$ s'écrit :

$$\Phi_2 = \Phi_{2_{ext}} = \Phi_{21} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 d\vec{S}_2 \propto i_1$$

En désignant cette fois par M_{21} le facteur de proportionnalité, il vient que : $\Phi_2 = \Phi_{21} = M_{21} i_1$

On peut enfin montrer que : $M_{12} = M_{21} = M$ qu'on appellera *coefficient d'induction mutuelle* des circuits $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Finalement, le flux magnétique Φ_{21} de $\vec{B}_1$ à travers le circuit $\mathcal{C}_2$ ainsi que le flux magnétique Φ_{12} de $\vec{B}_2$ à travers le circuit $\mathcal{C}_1$ s'écrivent respectivement :

$$\boxed{\Phi_{21} = M.i_1 \quad \text{et} \quad \Phi_{12} = M.i_2} \quad (1.5)$$

Lorsque ces flux varient au cours du temps, un phénomène d'induction mutuelle apparaît au sein de chaque circuit. Les *fem* induites correspondantes sont :

$$\begin{aligned} e_1(t) = e_{1_{ext}}(t) &= -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M\frac{di_2(t)}{dt} \quad (\text{dans } \mathcal{C}_1) \\ e_2(t) = e_{2_{ext}}(t) &= -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M\frac{di_1(t)}{dt} \quad (\text{dans } \mathcal{C}_2) \end{aligned}$$

Remarques :

- M s'exprime en Henry (H). Sa valeur est algébrique et son signe dépend de l'orientation relative des circuits $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
- Si les coefficients d'auto-induction L_1 et L_2 des deux circuits ne sont plus négligeables, les flux dans ces derniers deviennent :

$$\begin{cases} \Phi_1 = \Phi_{1_p} + \Phi_{1_{ext}} = \Phi_{1_p} + \Phi_{12} = L_1 i_1(t) + M i_2(t) \\ \Phi_2 = \Phi_{2_p} + \Phi_{2_{ext}} = \Phi_{2_p} + \Phi_{21} = L_2 i_2(t) + M i_1(t) \end{cases}$$

En désignant par R_1 et R_2 les résistances respectives des deux circuits, les équations électriques dans ces derniers s'écrivent :

$$\begin{cases} e_1(t) = R_1 i_1(t) \quad \longrightarrow \quad \boxed{-L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = R_1 i_1(t)} \quad (\text{dans } \mathcal{C}_1) \\ e_2(t) = R_2 i_2(t) \quad \longrightarrow \quad \boxed{-L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = R_2 i_2(t)} \quad (\text{dans } \mathcal{C}_2) \end{cases}$$

Les deux équations encadrées ci-haut constituent un système d'équations couplées par $i_1(t)$ et $i_2(t)$ ¹. On dit aussi que les circuits $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont couplés par un phénomène d'induction mutuelle.

Ainsi, on introduit le coefficient de couplage k défini par

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

¹Sa résolution exige le changement de variables suivant : $\alpha(t) = i_1(t) + i_2(t)$ et $\beta(t) = i_1(t) - i_2(t)$

$$(0 \leq k \leq 1)$$

- Si $k \simeq 0$: le couplage entre les deux circuits est faible
- Si $k \simeq 1$: le couplage entre les deux circuits est fort. Ceux-ci sont dit en *influence totale*, c'est à dire que les lignes de champ magnétique issues de l'un des deux circuits passent toutes à travers l'autre.

III Circuit mobile dans un champ stationnaire : induction de Lorentz

Dans le cas d'une induction de Lorentz, la détermination de l'équation électrique ne suffit pas pour la mise en équation complète du phénomène d'induction.

Reprenons l'exemple de la barre en translation sur les deux rails de Laplace (figure 1.6 ci-contre) en présence d'un champ magnétique extérieur stationnaire $\vec{B}$. La position de la barre est repérée par son abscisse $x(t)$.

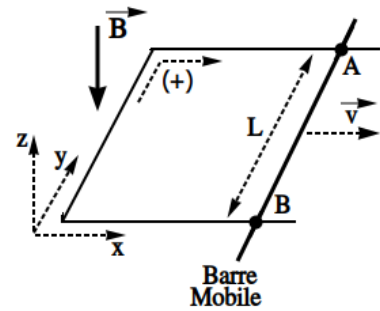


Figure 1.6

Le flux de $\vec{B}$ à travers la surface du circuit s'écrit : $\Phi(t) = B.S(t) = BLx(t)$, de sorte que la *fem* induite est : $e(t) = -d\Phi/dt = -BL\dot{x}(t) = -BLv(t)$. En désignant par R la résistance électrique de la barre, il s'en suit que l'équation électrique est :

$$e(t) = Ri(t) \quad \text{soit} \quad \boxed{-BLv(t) = Ri(t)} \quad (1.6)$$

L'équation électrique précédente ne peut pas être résolue du moment qu'elle fait apparaître deux inconnus, à savoir le courant $i(t)$ et la vitesse de la barre $v(t)$. Par conséquent, une deuxième équation s'avère indispensable pour la mise en équation complète du phénomène d'induction dans la barre : il s'agit de l'équation mécanique.

La R.F.D. appliquée à la barre permet d'écrire :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_L$$

où $\vec{P}$ et $\vec{R}$ désignent respectivement le poids de la barre et la réaction verticale des rails de Laplace (le mouvement de la barre étant supposé sans frottement). Les projections de $\vec{P}$ et $\vec{R}$ sur l'axe (x') du mouvement sont nulles.

La force de Laplace exercée par $\vec{B}$ sur le courant circulant dans la barre s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{F}_L &= \int_A^B i(t) d\vec{l} \wedge \vec{B} = i(t) \overrightarrow{AB} \wedge \vec{B} \\ &= i(t) L(-\vec{e}_y) \wedge (-B\vec{e}_z) \\ &= LBi(t)\vec{e}_x\end{aligned}$$

D'où, en remplaçant dans la R.F.D. et en projetant sur l'axe $(x'x)$ on aboutit à l'équation mécanique régissant le phénomène d'induction de Lorentz étudié :

$$\boxed{m \frac{dv}{dt} = LBi(t)} \quad (1.7)$$

Finalement, le problème est complètement défini grâce à l'équation électrique 1.6 et à l'équation mécanique 1.7 qu'on réécrit ci-bas :

$$-BLv(t) = Ri(t) \quad (1.8a)$$

$$m \frac{dv(t)}{dt} = LBi(t) \quad (1.8b)$$

Maintenant, on se propose de résoudre le système d'équations précédent.

La dérivée par rapport au temps de l'équation électrique 1.8a permet d'écrire :

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{R}{4} BL \frac{di(t)}{dt}$$

soit alors en remplaçant dans l'équation mécanique 1.8b :

$$-\frac{mR}{BL} \frac{dv(t)}{dt} = BLv(t) \quad \longrightarrow \quad \frac{dv(t)}{dt} + \frac{(BL)^2}{mR} v(t) = 0$$

dont la solution s'écrit (en posant $\tau = mR/(BL)^2$ et V_0 la vitesse initiale de la barre) :

$$v(t) = V_0 e^{-t/\tau}$$

De même on montre que : $i(t) = \frac{LBV_0}{R} e^{-t/\tau}$

Remarques :

- Si $t \longrightarrow \infty$ alors $v(t) \longrightarrow 0$: la barre finit par s'immobiliser malgré que son mouvement s'effectue sans frottement : en effet, c'est sa résistance électrique R qui dissipe de l'énergie.

Application : freinage par induction.

- On réalise un bilan de puissance en multipliant l'équation électrique par le courant $i(t)$ et

l'équation mécanique par $v(t)$. Dans le cas de l'exemple des rails de Laplace, cela donne :

$$\begin{aligned} -BLv(t)i(t) &= Ri^2(t) \\ BLi(t)v(t) &= mv(t)\frac{dv(t)}{dt} \end{aligned}$$

Sommer enfin les deux équations précédentes donne le bilan de puissance suivant :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2(t)\right) + Ri(t) = 0$$

→ L'énergie cinétique de la barre est dissipée par effet Joule dans la résistance. Le terme de Laplace ne figure pas dans le bilan de puissance final car son rôle se limite à assurer le transfert d'énergie entre cinétique (*i.e.* mécanique) et électrique.

- Quand le mouvement du circuit est une rotation, l'équation mécanique s'obtient par application du théorème du moment cinétique. On rappelle notamment que le moment des forces de Laplace exercées par un champ $\vec{B}$ sur un circuit filiforme fermé (assimilable à un dipôle magnétique de moment dipolaire $\vec{m}$) s'écrit :

$$\vec{\mathcal{M}}(\vec{F}_L) = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

IV Courants de Foucault

Lorsque le phénomène d'induction a lieu à l'intérieur du volume du conducteur, les courants induits qui prennent naissance sont des courants volumiques appelés *courants de Foucault*. Ces courants dissipent de l'énergie par effet Joule ce qui peut être mis à profit dans certaines circonstances à l'exemple du chauffage dans les fours à induction ou du freinage des véhicules de poids lourd.