

Ondes électromagnétiques planes dans le vide

Introduction

I Équation de propagation des champs

On se place dans le vide (de permittivité électrique ε_0 et de perméabilité magnétique μ_0) dépourvu de charges et de courants électriques, c'est-à-dire $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$. Dans ce cadre, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\operatorname{div} \vec{E}(M, t) = 0 \quad (\text{MG}) \quad ; \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t} \quad (\text{MF})$$

$$\operatorname{div} \vec{B}(M, t) = 0 \quad (\text{M}\Phi) \quad ; \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B}(M, t) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} \quad (\text{MA})$$

I.1 Équation de propagation du champ électrique

Si on applique maintenant l'opérateur rotationnel à l'équation (MF) on obtient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E}) &= -\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B}) \\ &= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

D'autre part, on donne : $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$. Comme $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ (MG), il vient enfin que le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}} \quad (1.1)$$

→ Équation de propagation du champ
électrique dans le vide

I.2 Équation de propagation du champ magnétique

De la même manière, si on applique cette fois l'opérateur rotationnel à l'équation (MA) on obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{B}) &= \mu_0\varepsilon_0\overrightarrow{rot}\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \\ &= \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{rot}\vec{E}) \\ &= -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

Encore, comme $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{B}) = \overrightarrow{grad}(\text{div}\vec{B}) - \Delta\vec{B}$ et vu que $\text{div}\vec{B} = 0$ (MΦ), il s'en suit enfin que l'équation différentielle satisfaite par le champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ s'écrit :

$$\Delta\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (1.2)$$

→ Équation de propagation du champ
magnétique dans le vide

Remarques :

- En coordonnées cartésiennes, l'opérateur Laplacien Δ d'un vecteur $\vec{U}(M) = \vec{U}(x,y,z) = U_x(M)\vec{e}_x + U_y(M)\vec{e}_y + U_z(M)\vec{e}_z$ se donne par :

$$\Delta\vec{U} = \Delta U_x.\vec{e}_x + \Delta U_y.\vec{e}_y + \Delta U_z.\vec{e}_z = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

- Analyse dimensionnelle de $\mu_0\varepsilon_0$:

$$\begin{aligned}[\Delta B] = \frac{[B]}{L^2} &= [\mu_0\varepsilon_0] \cdot \left[\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}\right] \\ &= [\mu_0\varepsilon_0] \cdot \frac{[B]}{T^2}\end{aligned}$$

D'où : $\left[\mu_0\varepsilon_0\right] = \frac{T^2}{L^2} = \frac{1}{(L/T)^2}$ et, par conséquent, la quantité $\mu_0\varepsilon_0$ est homogène à l'inverse du carré d'une vitesse : $\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{(\text{vitesse})^2}$. Cette vitesse n'est autre que la vitesse de propagation de l'onde électromagnétique dans le vide.

Application numérique : on donne les valeurs de $\varepsilon_0 = 8,85.10^{12} \text{ Fm}^{-1}$ et $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$ ce qui permet de montrer que :

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 3.10^8 \text{ ms}^{-1} = c$$

→ célérité de la lumière dans le vide

Ceci permet d'écrire les équations de propagation des champs $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$ dans le vide en l'absence de charges et de courants comme suit :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

- Les champs $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$ obéissent à la même équation de propagation :

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \cdot (\vec{E} \text{ ou } \vec{B}) = \vec{0}$$

Elle est dite *équation d'onde* ou encore *équation de d'Alembert*. On définit l'opérateur mathématique suivant appelé *opérateur d'Alembertien* :

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

I.3 Solutions de l'équation de propagation

I.3.1 Cas d'une propagation unidimensionnelle

Pour simplifier, supposons que la fonction d'onde $\Psi(M, t)$ cherchée ($\Psi(M, t) = E(M, t)$ ou $B(M, t)$) dépend spatialement d'une seule variable x : $\Psi(M, t) = \Psi(x, t)$. L'équation d'onde s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.3)$$

Les solutions d'une telle équation sont :

- $\Psi_1(x, t) = \text{cte}$: à rejeter car une solution pareille (constante pure) n'a aucun intérêt physique dans la description d'un phénomène ondulatoire (c'est-à-dire qui évolue dans le temps et dans l'espace)
- $\Psi_2(x, t) = f(t - \frac{x}{c})$: cette fonction caractérise une onde qui se propage dans le sens des

x croissants ($x \nearrow$)

- $\Psi_3(x, t) = g(t + \frac{x}{c})$: cette fonction caractérise une onde qui se propage dans le sens des x décroissants ($x \searrow$)

Démonstration :

On se propose de montrer que $f(t - \frac{x}{c})$ est bien solution de l'équation d'onde à une dimension (1.3). Pour cela, optons pour un changement de variable en posant :

$$u = t - \frac{x}{c} \quad \text{ce qui permet d'écrire} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{c} \end{cases}$$

Il vient alors que : $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-1}{c} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}$

Soit encore :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-1}{c} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \left(\frac{-1}{c} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \right) \\ &= \frac{-1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \cdot \left(\frac{-1}{c} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \right) \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \end{aligned}$$

De même : $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}$, ce qui donne :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

En remplaçant les expressions précédentes dans l'équation (1.3) on obtient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 0$$

D'où on conclut que $f(t - \frac{x}{c})$ est bien solution de l'équation de propagation à une dimension.

En posant $v = t + \frac{x}{c}$ on montre de même que $g(t + \frac{x}{c})$ est aussi solution de l'équation de propagation.

Finalement, on retient que la solution de l'équation d'onde à une dimension (1.3) s'écrit :

$$\Psi(x, t) = \underbrace{f\left(t - \frac{x}{c}\right)}_{\substack{\text{onde se propageant} \\ \text{vers les } x \nearrow}} + \underbrace{g\left(t + \frac{x}{c}\right)}_{\substack{\text{onde se propageant} \\ \text{vers les } x \searrow}} \quad (1.4)$$

I.3.2 Cas d'une propagation tridimensionnelle : onde sphérique

Dans ce cas, la fonction d'onde $\Psi(M, t)$ ne dépend spatialement que de la variable $r = \|\vec{OM}\|$: $\Psi(M, t) = \Psi(r, t)$. Le Laplacien d'une telle fonction s'écrit en coordonnées sphériques : $\Delta\Psi(r, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\Psi)}{\partial r^2}$. D'où, l'équation d'onde devient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\Psi)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0$$

soit, en multipliant par r : $\frac{\partial^2(r\Psi)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(r\Psi)}{\partial t^2} = 0$, ce qui donne :

$$r\Psi(r, t) = f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

et enfin la fonction d'onde sphérique suivante :

$$\Psi(r, t) = \frac{1}{r} \cdot f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r} \cdot g\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

II Onde plane progressive monochromatique

II.1 Notion d'onde plane

— On désigne par «*surface d'onde*» ou encore «*front d'onde*» la surface qui est perpendiculaire à la direction de propagation d'onde.

— Une onde est dite plane si, à un instant t fixé, et perpendiculairement à sa direction de propagation on a $\|\Psi(M, t)\| = cte$.

Autrement, à un instant t fixé, $\|\Psi(M, t)\|$ reste constant sur la même surface d'onde, ce qui implique que cette dernière est de géométrie plane. On parle alors dans ce cas de «*plan d'onde*». Encore, une onde est dite plane si elle se propage suivant une direction fixe de l'espace.

Remarque :

- Pour une onde plane se propageant dans la direction d'un vecteur unitaire fixe dans l'espace $\vec{e}_u$ ($\vec{e}_u = \alpha\vec{e}_x + \beta\vec{e}_y + \gamma\vec{e}_z$), la dépendance spatiale de la fonction d'onde $\Psi(M, t) = \Psi(x, y, z, t)$

peut se ramener à une seule variable spatiale $u = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{e}_u$:

$$\Psi(M, t) = \Psi(u, t) = \Psi(\overrightarrow{OM} \cdot \vec{e}_u, t)$$

- En réalité, les ondes électromagnétiques émises par des sources de manière spontanée se propagent dans toutes les directions de l'espace, et -par conséquent- sont des ondes sphériques. Elles ne peuvent être approximées à des ondes planes que très loin de leurs sources.

II.2 Onde plane progressive monochromatique : OPPM

II.2.1 Définition

On désigne par « *Onde Plane Progressive Monochromatique* » OPPM (appelée encore OPPH, Harmonique) une onde plane dont la fonction d'onde varie sinusoidalement dans le temps et dans l'espace. L'OPPM représente une solution particulière de l'équation de d'Alembert. Il s'agit d'une notion purement mathématique dont l'intérêt repose sur la décomposition de Fourier : toute onde peut être décomposée en une somme de vibrations parfaitement monochromatiques OPPM.

II.2.2 Expression générale

Considérons une OPPM qui se propage dans le sens d'un vecteur unitaire $\vec{e}_u$ fixe dans l'espace. Le champ électrique d'une telle onde s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{E}(M, t) &= \vec{E}\left(t - \frac{u}{c}\right) = \vec{E}\left(t - \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \vec{e}_u}{c}\right) \\ &= \vec{E}_0 \cdot \cos\left(\omega\left(t - \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \vec{e}_u}{c}\right) + \varphi_0\right) \\ &= \vec{E}_0 \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} \vec{e}_u \cdot \overrightarrow{OM} + \varphi_0\right) \end{aligned}$$

(1.6)

En introduisant $\vec{k} = k\vec{e}_u = \frac{\omega}{c}\vec{e}_u$ appelé *vecteur d'onde* et dirigé dans le sens $\vec{e}_u$ de propagation de l'onde, on peut finalement écrire :

$$\boxed{\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \cdot \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} + \varphi_0\right)}$$

(1.7)

→ Forme générale du champ
électrique d'une OPPM

On définit dans l'expression précédente :

- $\vec{E}_0$: amplitude vectorielle du champ électrique
- $\varphi(M, t) = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_0$: phase instantanée de l'onde, telle que :
 - ω : pulsation de l'onde
 - $\vec{k} = k \cdot \vec{e}_u$: vecteur d'onde de l'onde
 - φ_0 : phase de l'onde à l'origine des temps et des espaces.

Remarques :

- Le champ électrique de l'onde plane se propageant suivant la direction et le sens de $\vec{k}$ peut aussi être écrite comme suit :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{OM} - \omega t + \varphi_0)$$

- L'OPPM est doublement périodique, dans le temps et dans l'espace telque :
 - $T = 2\pi/\omega$ (en s) représente la période temporelle de l'onde
 - $\nu = 1/T = \omega/2\pi$ (en Hz) est la fréquence temporelle de l'onde
 - $\lambda = 2\pi/k$ (en m) désigne la période spatiale de l'onde, appelée «longueur d'onde»
 - $\sigma = 1/\lambda = k/2\pi$ (en m^{-1}) est équivalent à une fréquence spatiale de l'onde, appelé «nombre d'onde»
- On a toujours $k = 2\pi/\lambda$, mais seulement dans le vide $k = \omega/c$, de sorte que la longueur d'onde dans le vide de l'OPPM se donne par :

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{\nu}$$

Ainsi, le spectre des ondes électromagnétiques est donné par la figure 1.1 ci-bas :

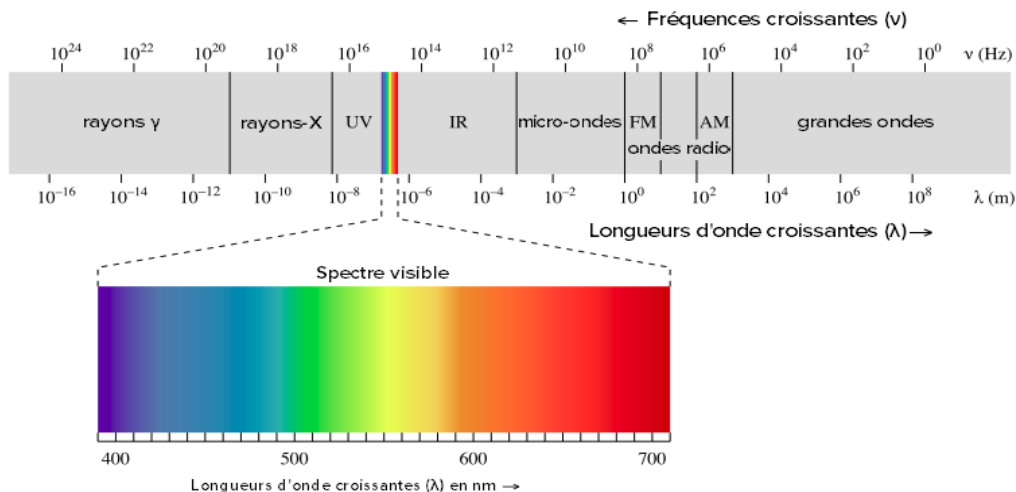


Figure 1.1 – Spectre électromagnétique

II.2.3 Surfaces équi-phases

On appelle *surface équi-phase* le lieu des points M de l'espace qui, à un instant t fixé, ont la même phase : $\varphi(M, t) = cte$.

On peut montrer aisément que les surfaces équi-phases sont toujours perpendiculaires au vecteur d'onde $\vec{k}$.

En effet, considérons deux points M et M' appartenant à la même surface équi-phase et qui sont infiniment voisins, de sorte que : $\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM}$.

Comme $\varphi(M, t) = cte$ il vient alors que $d\varphi(M, t) = 0 \rightarrow \vec{k} \cdot d\overrightarrow{OM} = 0$ et donc $d\overrightarrow{OM} \perp \vec{k}$.

Ainsi, $\vec{k}$ est perpendiculaire à $d\overrightarrow{OM}$ c'est-à-dire à $\overrightarrow{MM'}$ quelque soit M et M' sur la même surface équi-phase, ce qui implique immédiatement que $\vec{k}$ est perpendiculaire à toute la surface équi-phase.

Remarques : vitesse de phase et vitesse de groupe

- La vitesse suivant laquelle se propagent les surfaces équi-phases au cours du temps est appelée *vitesse de phase* v_φ . En effet, pour $\vec{k} = k\vec{e}_u$ et $\overrightarrow{OM} = u\vec{e}_u$ ($u = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{e}_u$) on a :

$$\varphi(M, t) = \omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} + \varphi_0 = \omega t - k \cdot u + \varphi_0$$

$$d\varphi(M, t) = 0 \rightarrow \omega dt - k \cdot du = 0 \rightarrow \frac{du}{dt} = v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

On retient finalement que la vitesse de phase s'écrit :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} \quad (1.8)$$

Dans le vide on a : $v_\varphi = c$

- Par définition, on désigne par *vitesse de groupe* v_g la quantité suivante :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (1.9)$$

Dans le vide on a : $v_g = v_\varphi = c$

II.3 Représentation complexe d'une OPPM

II.3.1 Intérêt de la notation complexe

Il est souvent commode, pour des raisons de simplification, d'associer à une grandeur harmonique une expression complexe. L'intérêt de travailler avec la notation complexe réside dans la simplicité qu'elle offre lors du calcul des dérivées.

En effet, si on considère une grandeur vectorielle harmonique $\vec{G}(M, t)$ (qui peut représenter le

champ $\vec{E}(M, t)$ ou $\vec{B}(M, t)$ d'une OPPM), celle-ci s'écrit :

$$\vec{G}(M, t) = \vec{G}_0 \cdot \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_0)$$

À $\vec{G}(M, t)$ on associe une écriture complexe $\underline{\vec{G}}(M, t)$ telle que :

$$\begin{aligned} \underline{\vec{G}}(M, t) &= \vec{G}_0 \cdot \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_0) \\ &= \vec{G}_0 \cdot \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM}) \end{aligned}$$

où $\vec{G}_0 = \vec{G}_0 \cdot \exp i\varphi_0$: est l'amplitude vectorielle complexe de $\underline{\vec{G}}(M, t)$.

On peut montrer aisément qu'en notation complexe on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\vec{G}}}{\partial t} &= i\omega \underline{\vec{G}} & \frac{\partial^2 \underline{\vec{G}}}{\partial t^2} &= -\omega^2 \underline{\vec{G}} \\ \text{div } \underline{\vec{G}} &= -i \vec{k} \cdot \underline{\vec{G}} & \text{rot } \underline{\vec{G}} &= -i \vec{k} \wedge \underline{\vec{G}} \\ \Delta \underline{\vec{G}} &= -k^2 \underline{\vec{G}} \end{aligned}$$

Remarques :

Si l'OPPM est représentée par la grandeur vectorielle $\vec{G}(M, t) = \vec{G}_0 \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{OM} - \omega t + \varphi_0)$ à laquelle on associe l'expression complexe :

$$\underline{\vec{G}}(M, t) = \vec{G}_0 \cdot \exp i(\vec{k} \cdot \vec{OM} - \omega t)$$

alors les dérivées spatio-temporelles de $\underline{\vec{G}}(M, t)$ donnent dans ce cas :

$$\frac{\partial \underline{\vec{G}}}{\partial t} = -i\omega \underline{\vec{G}} \quad ; \quad \text{div } \underline{\vec{G}} = +i \vec{k} \cdot \underline{\vec{G}} \quad ; \quad \text{rot } \underline{\vec{G}} = +i \vec{k} \wedge \underline{\vec{G}}$$

II.3.2 Équations de Maxwell en notation complexe-Structure d'une OPPM

Pour une OPPM se propageant dans le vide dépourvu de charges et de courants, de vecteur champ électrique $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \cdot \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})$, les équations de Maxwell s'écrivent en notation complexe :

$$(MG) \quad \text{div } \underline{\vec{E}} = 0 \quad \longrightarrow \quad -i \vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \quad (1.10a)$$

$$(M\Phi) \quad \text{div } \underline{\vec{B}} = 0 \quad \longrightarrow \quad -i \vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} = 0 \quad (1.10b)$$

$$(MF) \quad \text{rot } \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad -i \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -i\omega \underline{\vec{B}} \quad (1.10c)$$

$$(MA) \quad \vec{\text{rot}} \underline{\vec{B}} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad -i \vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \frac{i\omega}{c^2} \underline{\vec{E}} \quad (1.10d)$$

Les équations précédentes permettent de caractériser les propriétés structurales d'une OPPM, à savoir :

- L'équation de Maxwell-Gauss (1.10a) implique que : $\boxed{\vec{k} \perp \underline{\vec{E}}}$ $\longrightarrow$ l'onde est alors dite transverse électrique (TE)

- L'équation de Maxwell-Flux (1.10b) implique que : $\boxed{\vec{k} \perp \underline{\vec{B}}}$ $\longrightarrow$ l'onde est aussi dite transverse magnétique (TM).

Elle est alors transverse électrique et magnétique TEM.

- L'équation de Maxwell-Faraday (1.10c) implique que : $\boxed{\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}}$ $\longrightarrow$ on dit alors que $(\vec{k}, \underline{\vec{E}}, \underline{\vec{B}})$ forme un trièdre direct.

Dans le vide, $\vec{k} = k \vec{e}_u = \frac{\omega}{c} \vec{e}_u$, ainsi la relation précédente devient dans ce cas :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{e}_u \wedge \underline{\vec{E}}}{c}$$

ce qui implique que les modules E et B des champs électriques et magnétiques vérifient la relation suivante :

$$\boxed{B = \frac{E}{c}}$$

Remarque :

Pour une OPPM se propageant dans le vide sans charges ni courants, l'équation de propagation s'écrit :

$$\Delta \underline{\vec{E}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

soit, en remplaçant :

$$-k^2 \underline{\vec{E}} + \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\vec{E}} = \vec{0}$$

Finalement, on établit la relation suivante entre k et ω , appelée relation de dispersion du milieu (*i.e.* le vide dans ce cas) :

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (1.11)$$

Si la relation de dispersion est linéaire le milieu de propagation est dit non dispersif. Sinon, si elle est non linéaire le milieu est dit dispersif.

II.4 Aspects énergétiques de l'OPPM

On s'intéresse à l'OPPM de champ électrique en notation complexe :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \cdot \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_0)$$

Une étude énergétique s'appuie sur l'équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique, *i.e.* équation de Poynting, qu'on rappelle ici :

$$\frac{\partial e_{em}}{\partial t} = -\text{div} \vec{\Pi} - \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (1.12)$$

où :

- $e_{em} = e_e + e_m = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$: désigne la densité volumique d'énergie électromagnétique
- $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$: est le vecteur de Poynting
- $\vec{j} \cdot \vec{E} = \mathfrak{p}_J^{vol}$: représente la densité volumique de puissance dissipée par effet Joule

Comme ces différents termes énergétiques sont tous des termes quadratiques, il ne faut jamais les calculer avec la notation complexe, mais plutôt en passant d'abord à la notation réelle :

$$\vec{E}(M, t) = \text{Re}(\vec{E}(M, t)) = \vec{E}_0 \cdot \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_0)$$

Compte tenu de ça, on a :

- La densité volumique d'énergie électromagnétique :

$$\begin{aligned} e_{em}(M, t) = e_e(M, t) + e_m(M, t) &= \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \\ &= \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{(E/c)^2}{2\mu_0} \\ &= \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} \\ &= \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \end{aligned}$$

On retient enfin que, pour une onde plane se propageant dans le vide, on a équipartition de l'énergie entre électrique et magnétique $e_e(M, t) = e_m(M, t) = \frac{\varepsilon_0 E^2(M, t)}{2}$, et la densité volumique d'énergie électromagnétique totale s'écrit :

$$\boxed{e_{em}(M, t) = 2e_e(M, t) = \varepsilon_0 E^2(M, t)} \quad (1.13)$$

Dans le présent cas, on a :

$$e_{em}(M, t) = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_0)$$

• Le vecteur de Poynting :

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}(M, t) &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E} \wedge \left(\frac{\vec{e}_u \wedge \vec{E}}{c} \right)}{\mu_0} \\ &= \frac{\vec{E} \wedge (\vec{e}_u \wedge \vec{E})}{\mu_0 c} \\ &= \frac{(\vec{E} \cdot \vec{E}) \vec{e}_u - (\vec{E} \cdot \vec{e}_u) \vec{E}}{\mu_0 c} \end{aligned}$$

Or $\vec{E} \cdot \vec{e}_u = 0$ car l'onde est plane donc elle est transverse électrique TE, $\vec{E} \cdot \vec{E} = E^2$ et $1/\mu_0 c = \varepsilon_0 c$ (car $c^2 = 1/\mu_0 \varepsilon_0$), il vient enfin que le vecteur de Poynting s'écrit :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\Pi}(M, t) &= \varepsilon_0 c E^2 \vec{e}_u = e_{em}(M, t) \cdot c \vec{e}_u \\ &= e_{em}(M, t) \vec{v}_{\text{énergie}} \end{aligned}} \quad (1.14)$$

On reconnaît immédiatement que l'énergie électromagnétique se propage dans le vide à la vitesse $\vec{v}_{\text{énergie}} = c \vec{e}_u$