

Partie 2 : Les 4 équations de Maxwell

1) Équation de Maxwell-Gauss

$$\underbrace{\iiint_{(V)} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{\tau}}_{>0} = \underbrace{\iiint_{(V)} \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \cdot d\tau}_{(V)}$$

$\vec{E} \cdot d\vec{V}$ $\downarrow$ Thm de Green-Ostrogradski:

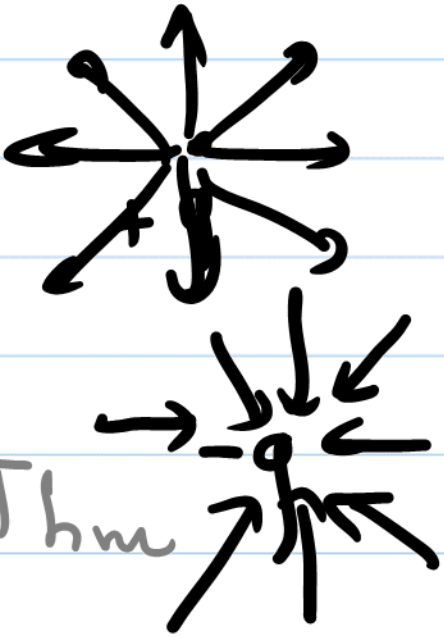
$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} : \text{Thm de Gauss.}$$

(S)/(V)

① Une charge électrique crée de l'espace qui l'entoure un champ électrique $\vec{E}$.

② $\vec{E} \cdot d\vec{V}$ à partir de la charge si $\rho > 0$
- cv vers la charge si $\rho < 0$.

③ π -Gauss est la forme locale du Thm de Gauss.



Partie 2 : Les 4 équations de Maxwell

2) Équation de Maxwell-flux:

$$\oint \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{L} = 0$$

(2) $\downarrow$ Green - 0.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

(S)/(0)

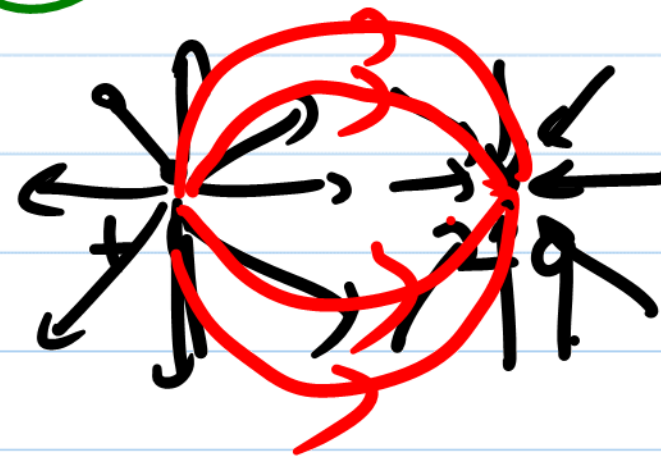
Toutes les P. magnétiques
sont dipolaires.

En magnétisme pas de monopôle.

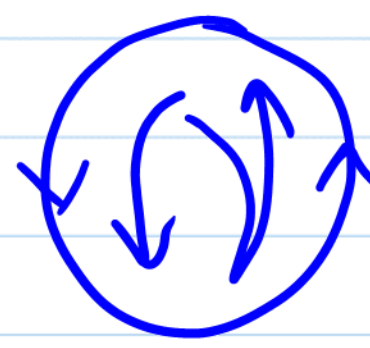
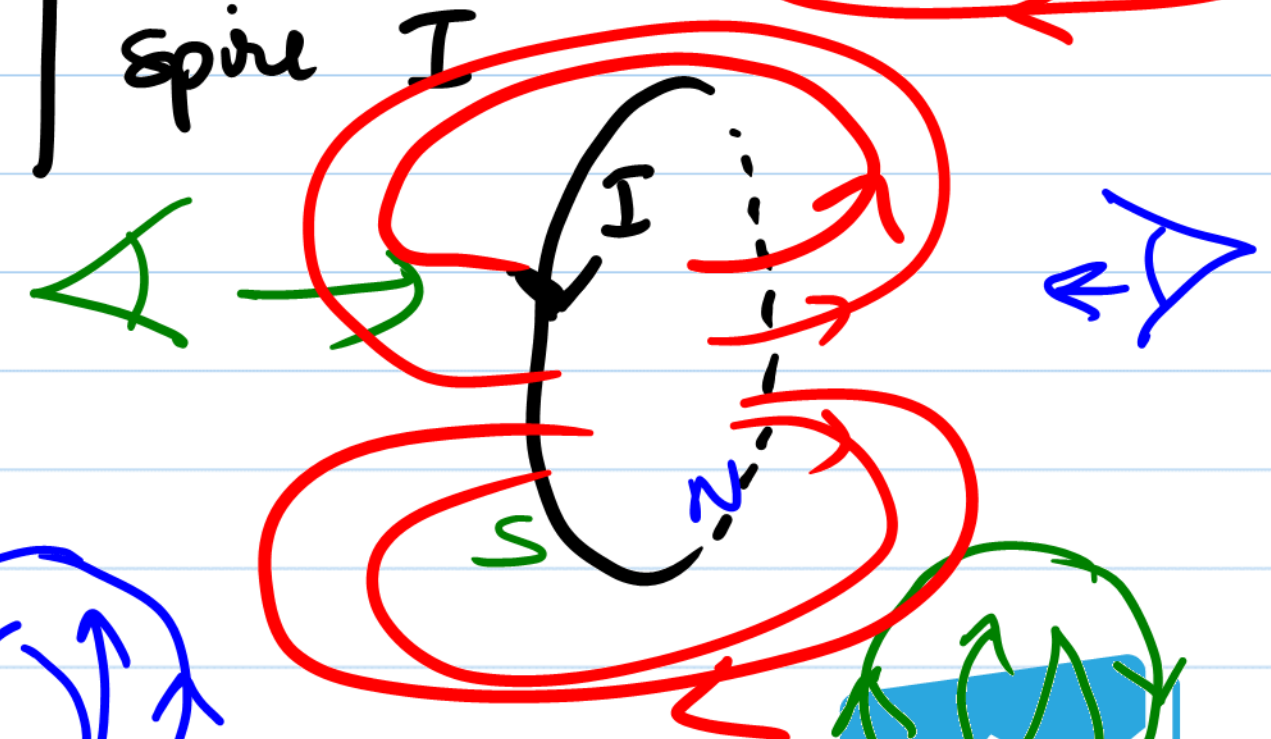
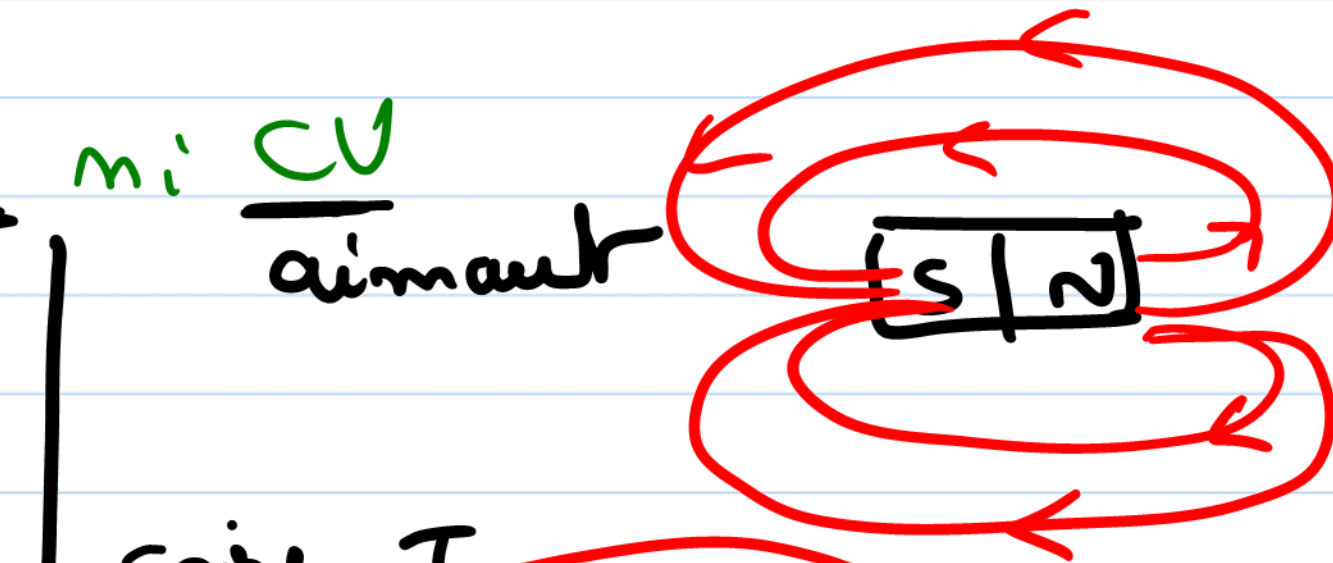
Cons : Les lignes de champ de $\vec{B}$ sont très fermées. nord.

① $\nabla \cdot \vec{B}$ est la forme locale de la conservation
du flux de $\vec{B}$.

② $\vec{B}$ n'est ni ∇V ni $\frac{CV}{\text{aimant}}$



(+) : (-)

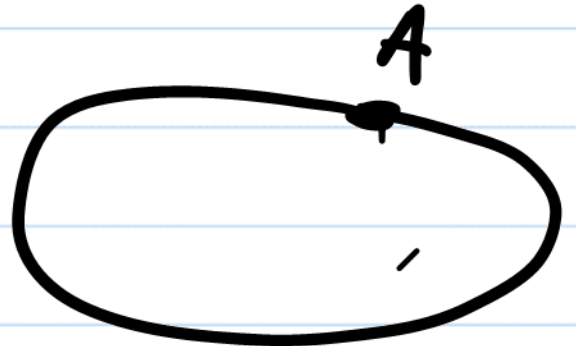


Partie 2 : Les 4 équations de Maxwell

3) Équation de Maxwell - Faraday:

1^{ère} année

$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$: La circulation de $\vec{E}$ le long d'un contour fermé est conservative.

$$\oint_C \underbrace{-\vec{\text{grad}} V \cdot d\vec{l}} = \oint_C -dV = - \int_A^A dV = - (V(A) - V(A)) = 0.$$


$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V.}$$

$\vec{E}$ dérive d'un potentiel scalaire.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

↓ Théorème Stokes - Ampère

$$\iint_{(S)/C} \vec{\text{rot}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \forall (S)/C \Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}.$$



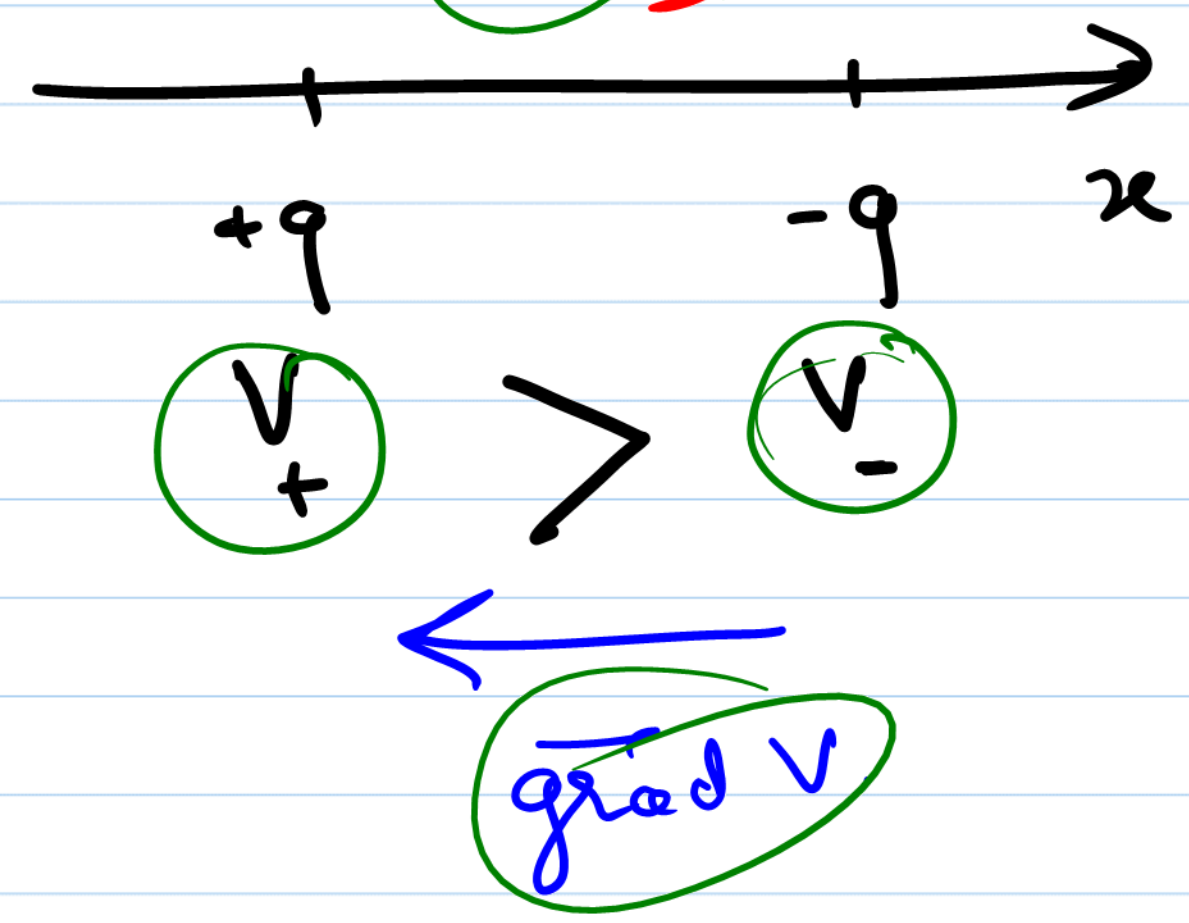
on sait
que

$$\vec{\text{rot}} (\vec{\text{grad}} f) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{\text{grad}} f.$$

► Partie 2 : Les 4 équations de Maxwell

$$\vec{E} = \text{grad } \phi = -\text{grad } V.$$



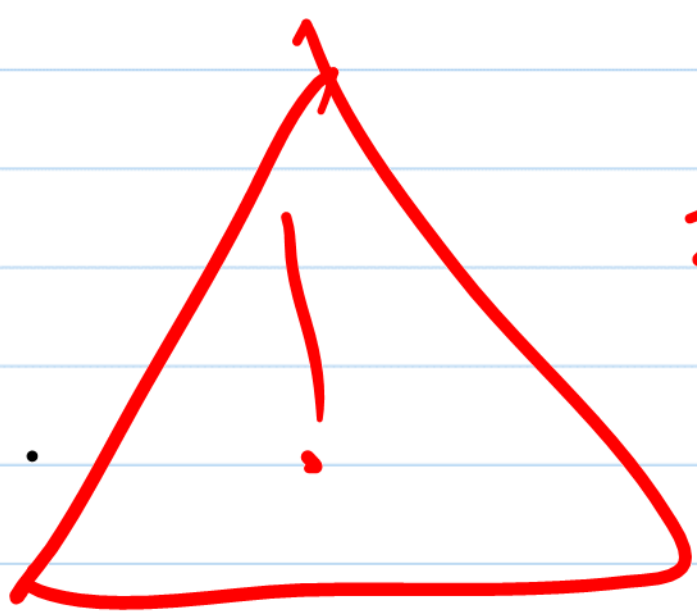
$$(\phi = -V)$$

$\vec{E}$ est dirigé vers les potentiels décroissants.

$$V = \frac{q}{C}$$

$$\text{grad } V = \underbrace{\frac{dV}{dx}}_{<0} \vec{e}_x$$

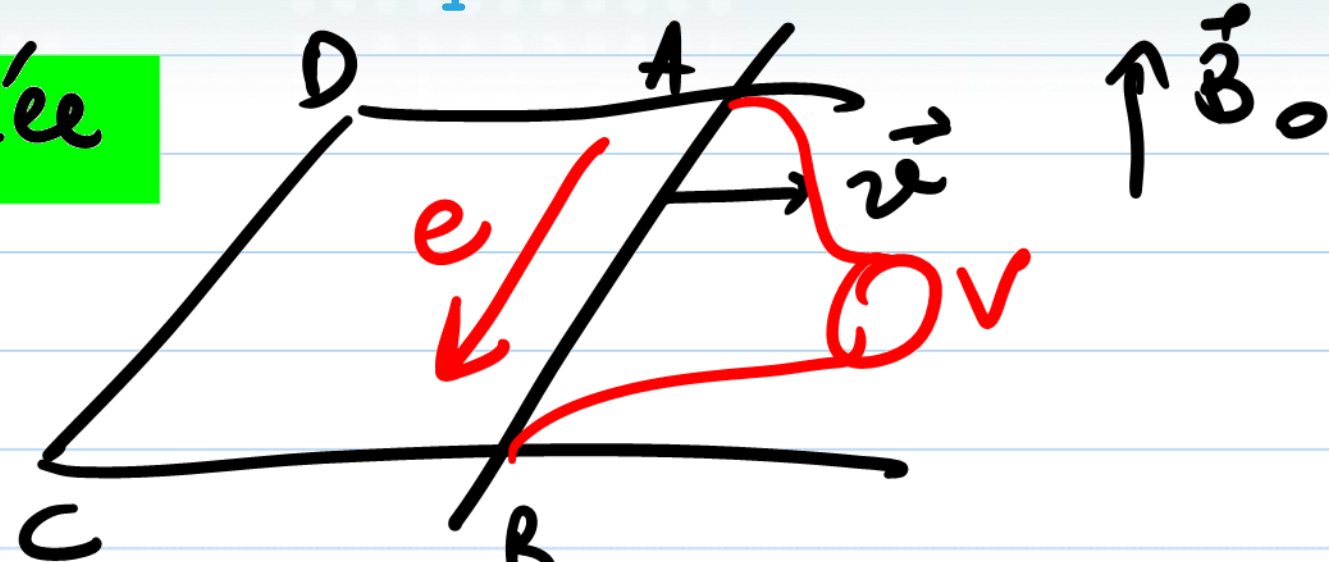
$$\left. \begin{array}{l} \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ \text{ou} \\ \text{rot } \vec{E} = \vec{0} \end{array} \right\} \rightarrow \vec{E} = -\text{grad } V.$$



pour un champ électrostatique.



Partie 2 : Les 4 équations de Maxwell

2^{ème} année

le voltmètre branché aux bornes du fil $\mathcal{E}$ de résistance négligeable indique une d.d.p. : la f.é.m. induite

$[AB] \equiv$ générateur de f.é.m. e !
et c'est lui qui délivre le courant induit i .

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \underbrace{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}}_e + \underbrace{\int_{\text{reste}} \vec{E} \cdot d\vec{l}}_0 = e$$

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

$$\phi(t) \rightarrow e$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = e = -\frac{d\phi}{dt}$$

La circulation du champ $\vec{E}$ électrique n'est plus conservative
 $\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$ et $\nabla \times \vec{E} \neq \vec{0}$.



► Partie 2 : Les 4 équations de Maxwell

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = e = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\pi, t)$$

$\uparrow$
 Loi de Faraday

$\downarrow$ Théorème de Stokes - Ampère

$$\oint_{(S)/\mathcal{C}} \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S)/(C)} \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad \forall \mathcal{C}.$$

$$\iint_{(S)} \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{(S)} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad \forall S$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E}(\pi, t) = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(\pi, t)$$

1^{re} - Faraday

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$



Partie 2 : Les 4 équations de Maxwell

4) Équation de Maxwell - Ampère :

1^{ère} année

$$\oint_{(S)} \vec{\text{rot}} \vec{B}(\pi) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \oint_{(S)} \vec{J}(\pi) \cdot d\vec{S} \longrightarrow \oint_C \vec{B}(\pi) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{\text{alg.}} I_{\text{enlacé}}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Eq. locale de c.c : $\text{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ yrs vraie.

حقيقة ثابتة

Tout résultat doit être cohérent avec ce principe.

Vérification :

$$\pi\text{-A : } \text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) = \mu_0 \vec{J}$$

$$\text{div} \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \text{div} \vec{J}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \mu_0 \text{div} \vec{J} \Rightarrow \boxed{\text{div} \vec{J} = 0}$$

$$\text{div} \vec{X} = \vec{\nabla} \cdot \vec{X}$$

$$\vec{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{X} = \vec{\nabla} \wedge \vec{X}$$

$$\Delta f = \nabla^2 f$$

$$\Delta \vec{X} = \nabla^2 \vec{X}$$

► Partie 2 : Les 4 équations de Maxwell

Attention : $\text{div } \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$ d'après l'éq. locale de c.c.

→ $\Pi-A$ كالتة

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\overset{\Pi-G}{\text{div}} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = \epsilon_0 \text{div } \vec{E}$$

$$\text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) = \mu_0 \left[\text{div } \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right]$$

$$\text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) = \mu_0 \left[\text{div } \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \text{div } \vec{E}) \right] = \mu_0 \left[\text{div } \vec{J} + \epsilon_0 \text{div } \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$$

On note $\vec{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \text{div} \left[\mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right]$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \quad (\Pi-A)$$

Stokes-Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I + I_D)$$

Thm d'Ampère
généralisé.

densité vol. de courant
de déplacement
de Maxwell.



Partie 2 : Les 4 équations de Maxwell

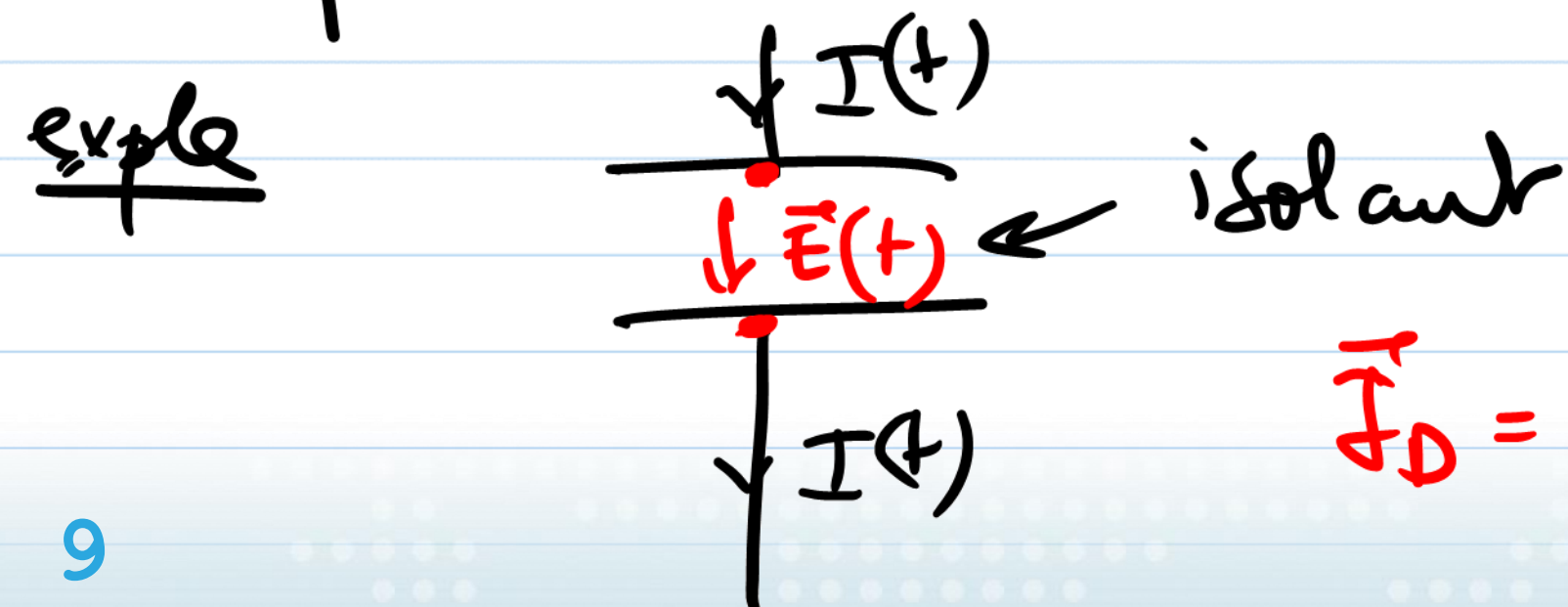
$$\Delta \vec{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{E}(t)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \vec{J}_D \right)$$

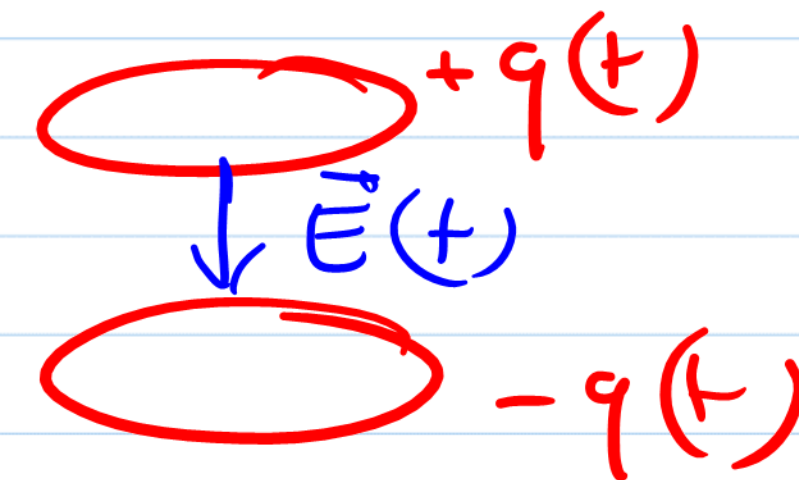
$\vec{E}(t)$

Attention: Ce courant $\vec{J}_D$ ne représente ni courant ni déplacement.

il s'agit d'un $\vec{E}(t)$ variable ds le temps.
et il représente une source de $\vec{B}$ au m^{ême}
titre que le courant de conduction $\vec{J}$.



$$\vec{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$



$$\vec{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(t) \neq 0$$

$$\vec{B}(t)$$



► Partie 2 : Les 4 équations de Maxwell

forme locale	Nom	forme intégrale	Signification de l'éq. locale
$\text{div } \vec{E}(r,t) = \frac{\rho(r,t)}{\epsilon_0}$	π -Gauss	$\oint_{(S)} \vec{E}(r,t) \cdot d\vec{S} = 0$	forme locale du Thm de Gauss R^0 source - champ.
$\text{div } \vec{B}(r,t) = 0$	π -flux	$\oint_{(S)} \vec{B}(r,t) \cdot d\vec{S} = 0$	le flux de $\vec{B}$ est conservatif. En magnétisme pas de monopôle Ttes les Distributions sont dipolaires. les l.c de $\vec{B}$ sont tjrs fermées.
$\text{rot } \vec{E}(r,t) = -\frac{\partial \vec{B}(r,t)}{\partial t}$	π -Faraday	$e = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}(r,t)$	Forme locale de la loi de Faraday : l'induction $\vec{B}(t)$ variable dans le temps est source de $\vec{E}$ à caractère non conservatif.
$\text{rot } \vec{B}(r,t) = \mu_0 \left[\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$	π -Ampère	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{\text{alg}} I + I_D$	forme locale du Thm d'Ampère généralisé (i.e du Régime variable) $\vec{E}(t)$ variable dans le temps est source de $\vec{B}$.

