

# Les conducteurs électriques

## Données pour toute l'épreuve

- Célérité de la lumière dans le vide :  $c \simeq 3,0 \times 10^8 m.s^{-1}$  ;
- Perméabilité magnétique du vide :  $\mu_0 \simeq 4\pi 10^{-7} H.m^{-1}$  ;
- Permittivité électrique du vide :  $\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c_0^2}$  ;
- Nombre d'AVOGADRO :  $\mathcal{N}_A = 6,02.10^{23} mol^{-1}$  ;
- Charge élémentaire :  $e = 1,6.10^{-19} C$  ;
- Masse de l'électron :  $m = 9,1.10^{-31} kg$  ;

On rappelle les équations de MAXWELL dans le vide en présence de charges  $\rho$  et de courants  $\vec{j}$ , et la loi de conservation de la charge électrique :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & ; & \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 & \quad ; & \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \quad ; & \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

ainsi que la relation de l'analyse vectorielle, pour un champ vectoriel  $\vec{A}$  :

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{A}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

## 1<sup>ère</sup> partie

### Conduction électrique dans un milieu matériel

On considère un milieu matériel homogène de dimension supposée infinie. La conduction électrique dans un tel milieu est due au déplacement des porteurs de charge. On note  $n$  la densité volumique des porteurs de charges susceptibles de se déplacer sous l'action d'un champ électrique  $\vec{E}(M, t)$ . On suppose que chaque porteur de charge est de masse  $m$  et possède une charge  $q$ .

Dans la suite, le poids du porteur de charge et la force d'origine magnétique seront négligés.

#### 1.1. Conductivité électrique d'un milieu matériel

En plus de l'action du champ électrique, on modélise l'interaction d'un porteur de charge avec le reste du milieu par :

- une force d'amortissement visqueux :  $\vec{F}_a = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$
- une force de rappel :  $\vec{F}_r = -m \omega_0^2 \vec{r}$

$\vec{r}$  étant le vecteur position du porteur de charge, mesuré par rapport à sa position d'équilibre, et  $\vec{v}$  sa vitesse par rapport à un référentiel lié au milieu matériel. La constante  $\tau$  est la durée caractéristique de la relaxation des vitesses.

**1.1.1.** En appliquant la loi fondamentale de la dynamique, écrire l'équation du mouvement du porteur de charge dans le milieu matériel.

**1.1.2.** Le milieu matériel est soumis à un champ électrique sinusoïdal de pulsation  $\omega$  :  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$ , auquel on associe le champ complexe :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i \omega t)$$

$i$  étant le nombre complexe tel que  $i^2 = -1$ .

**1.1.2.1.** Justifier le choix de l'étude en régime sinusoïdal.

**1.1.2.2.** Déterminer l'expression complexe de la vitesse  $\vec{v}$  du porteur de charge en régime sinusoïdal établi de pulsation  $\omega$ .

**1.1.3.** Écrire l'expression de la densité volumique de charges  $\rho$  associée aux porteurs mobiles en fonction de  $n$  et  $q$ .

**1.1.4.** On admet que la densité de courant  $\vec{j}$  est liée à la vitesse par la relation :  $\vec{j} = \rho \vec{v}$ . Écrire l'expression de la densité de courant  $\vec{j}$  en fonction de  $n$ ,  $q$  et  $\vec{v}$ .

**1.1.5.** A partir de l'expression complexe de la vitesse établie dans la question 1.1.2.2., donner l'expression complexe de la densité de courant  $\vec{j}$ .

**1.1.6.** En déduire qu'en régime établi, on peut écrire la loi d'Ohm sous la forme :  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ . Montrer alors que ce modèle permet de définir une conductivité complexe :

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + i \omega \tau \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)} \quad (1)$$

où  $\sigma_0$  est la conductivité statique dont on donnera l'expression en fonction de  $n$ ,  $q$ ,  $\tau$  et  $m$ .

## 1.2. Étude d'un milieu conducteur

On considère que le milieu matériel est un milieu conducteur pour lequel les porteurs de charges sont supposées libres de se déplacer dans le milieu matériel, c'est à dire qu'ils ne sont pas soumis à la force de rappel ( $\omega_0 = 0$ ).

**1.2.1.** Donner l'expression de la conduction électrique complexe d'un milieu conducteur.

**1.2.2.** Montrer que la conductivité complexe peut s'écrire sous la forme :

$$\sigma = \sigma_1 - i \sigma_2 \quad (2)$$

Donner les expressions de  $\sigma_1$  et de  $\sigma_2$  en fonction de  $\omega$ ,  $\tau$  et  $\sigma_0$ .

**1.2.3.** Dans le cas du cuivre, chaque atome libère un seul électron qui participe à la conduction électrique. La masse volumique du cuivre est :  $\rho_{Cu} = 8,9.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ , la masse molaire du cuivre est :  $M_{Cu} = 63,5 \text{ g.mol}^{-1}$ .

**1.2.3.1.** Donner l'expression du nombre d'électrons de conduction par unité de volume  $n$  en fonction de  $\rho_{Cu}$ ,  $M_{Cu}$  et du nombre d'AVOGADRO  $\mathcal{N}_A$ .

**1.2.3.2.** Déterminer la valeur numérique de  $n$ .

**1.2.3.3.** La conductivité du cuivre en régime statique est :  $\sigma_0 = 6.10^7 \text{ S.m}^{-1}$ . Déterminer la valeur de la constante de temps  $\tau$ .

**1.2.3.4.** Pour quel domaine de fréquences on a :  $\omega \tau \ll 1$  ? On posera :  $f_1 = \frac{1}{2\pi\tau}$ .

On suppose dans les questions suivantes que cette condition est vérifiée.

**1.2.4.** Donner les expressions approchées au premier ordre en  $(\omega \tau)$  de  $\sigma_1$  et de  $\sigma_2$ .

**1.2.5.** Montrer qu' en notation réelle, le vecteur densité de courant est lié au vecteur champ électrique par la relation :

$$\vec{j} = \sigma_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3)$$

Donner l'expression de  $\chi$  en fonction de  $\tau$ ,  $\sigma_0$  et  $\varepsilon_0$ .

**1.2.6.** Écrire l'équation de MAXWELL-AMPÈRE dans le milieu conducteur en admettant qu'elle a la même forme que celle du vide à condition d'utiliser la densité de courant donnée par la relation (3).

**1.2.7.** L'équation de MAXWELL-AMPÈRE précédemment écrite fait apparaître la somme de deux termes : le courant de conduction  $\vec{j}_c$  et d'un courant dit de déplacement  $\vec{j}_d$ . En admettant que le courant de conduction a la même expression qu'en basses fréquences, identifier la densité de courant de déplacement  $\vec{j}_d$ .

**1.2.8.** Montrer que le rapport de l'amplitude du courant de conduction à celle du courant de déplacement est donné par :

$$\eta = \frac{j_c}{j_d} = \frac{\sigma_0}{\omega \varepsilon_0 |1 + \chi|}$$

**1.2.9.** En fait, c'est le rapport  $\eta$  qui justifie le caractère isolant ou conducteur du matériau. Le milieu est conducteur si le courant de conduction prédomine ( $\eta \gg 1$ ). Au contraire, si le courant de déplacement prédomine, le milieu se comporte comme un isolant.

**1.2.9.1.** Déterminer la pulsation  $\omega_c$  pour laquelle le rapport  $\eta$  est égal à l'unité.

**1.2.9.2.** Déterminer  $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$  pour le cuivre. Dans quel domaine du spectre électromagnétique cette fréquence est-elle située ? Que peut-on dire du cuivre dans le domaine du rayonnement électromagnétique visible ?

## 2<sup>ème</sup> partie

### Propagation d'ondes électromagnétiques dans les conducteurs ohmiques

#### 2.1. Relation de dispersion dans un conducteur ohmique

On considère un conducteur ohmique pour lequel on suppose que la densité volumique de charge est nulle ( $\rho = 0$ ) et le vecteur densité de courant est lié au champ électrique par la relation :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

avec une conductivité  $\sigma$  réelle ( $\sigma = \sigma_0$ ).

2.1.1. Dans quel domaine de fréquences ce modèle de conducteur ohmique est valable ?

2.1.2. Écrire l'équation de Maxwell-Ampère pour un conducteur ohmique.

2.1.3. Établir l'équation de propagation à laquelle satisfait le champ électrique.

2.1.4. Justifier que la solution de cette équation peut s'écrire comme une superposition de solutions monochromatiques.

Par la suite, on cherche les solutions complexes sous forme d'ondes monochromatiques planes se propageant selon l'axe  $Oz$  et polarisées rectilignement selon  $Ox$  :

$$\vec{E}(z, t) = E(z) \exp(i \omega t) \vec{u}_x$$

2.1.5. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $E(z)$ .

2.1.6. On cherche les solutions de cette équation, de manière semblable à celle des ondes progressives, sous la forme :

$$E(z) = E_1 \exp(i k z) + E_2 \exp(-i k z)$$

avec le nombre d'onde (ou vecteur d'onde)  $k$  à priori complexe. Montrer que  $k$  vérifie l'équation :

$$k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 - i \omega \mu_0 \sigma \quad (4)$$

2.1.7. On ne considère dans cette question que la solution  $E_1 \exp(ikz)$  et on ne tient pas compte des champs statiques.

2.1.7.1. Déterminer l'expression du champ magnétique  $\vec{B}(z, t)$  en fonction de  $k, \omega, \vec{E}_1(z, t)$  et le vecteur unitaire  $\vec{u}_z$ .

2.1.7.2. Le champ magnétique est-il en phase avec le champ électrique ? Justifier.

#### 2.2. Propagation dans un mauvais conducteur

Les mauvais conducteurs électriques, aussi appelés milieux à pertes, sont tels que :  $\sigma \ll \epsilon_0 \omega$ .

**2.2.1.** Déterminer l'expression approchée du vecteur d'onde  $k$ . Montrer que ce vecteur d'onde peut être exprimé, en fonction du vecteur d'onde  $k_0 = \frac{\omega}{c}$  dans le vide et d'une longueur caractéristique  $l_p$ , sous la forme :

$$k = k_0 - i \frac{1}{l_p}$$

Donner l'expression de  $l_p$  en fonction de  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  et  $\sigma$ .

**2.2.2.** Comparer la longueur caractéristique  $l_p$  par rapport à la longueur d'onde dans le vide  $\lambda$ . Commenter.

**2.2.3.** Écrire l'expression complexe du champ électrique  $E(z, t)$  en tenant compte de ses deux termes de la question 2.1.6.

**2.2.4.** En déduire l'expression réelle du champ électrique. Interpréter chacun des deux termes de cette expression. Tracer l'allure des variations de chaque terme du champ en fonction de  $z$  à  $t$  fixé.

**2.2.5.** Montrer que la propagation de l'onde électromagnétique dans le conducteur s'accompagne d'une dissipation d'énergie. Que devient l'énergie perdue par l'onde électromagnétique ? Commenter l'expression de la distance d'absorption  $l_p$ .

### 2.3. Propagation dans les bons conducteurs : l'effet de peau

Pour les bons conducteurs, la situation est telle que  $\epsilon_0 \omega \ll \sigma$  et on ne garde dans l'expression du nombre d'onde que le terme dominant.

**2.3.1.** Déterminer l'expression approchée du vecteur d'onde  $k$  et mettre en évidence une longueur caractéristique  $\delta$ . Donner l'expression de  $\delta$  en fonction de  $\mu_0$ ,  $\omega$  et  $\sigma$ . Quel est le nom habituel de cette longueur caractéristique ?

**2.3.2.** Comparer la longueur caractéristique  $\delta$  par rapport à la longueur d'onde dans le vide  $\lambda$ . Commenter.

**2.3.3.** Écrire l'expression complexe du champ électrique  $E(z, t)$  en tenant compte de ses deux termes de la question 2.1.6. En déduire l'expression réelle du champ électrique. Commenter l'expression de la distance d'atténuation  $\delta$ .

**2.3.4.** Que pensez vous de la propagation de l'énergie électromagnétique dans un bon conducteur ? Comparer au cas de la propagation dans un mauvais conducteur.

Afin de comparer le comportement des deux types de conducteurs étudiés ci-dessus vis-à-vis de l'énergie électromagnétique véhiculée par une onde électromagnétique incidente, nous allons étudier la réflexion d'une onde électromagnétique sur un conducteur.

### 2.4. Réflexion d'une onde électromagnétique par un conducteur réel

On considère que le demi espace  $z < 0$  est vide tandis qu'un conducteur de conductivité  $\sigma$  occupe le demi espace  $z > 0$ . Une onde électromagnétique plane progressive harmonique de pulsation  $\omega$  se propage dans le vide suivant la direction  $Oz$ , dans le sens des  $z$  croissants et polarisée rectilignement suivant  $Ox$ . Cette onde, appelée onde incidente, arrive sous incidence normale sur le milieu conducteur (figure 1). Une partie de l'énergie de l'onde est réfléchiée, une autre est transmise.

Il en résulte que dans le vide ( $z < 0$ ), le champ est la superposition d'une onde incidente et d'une

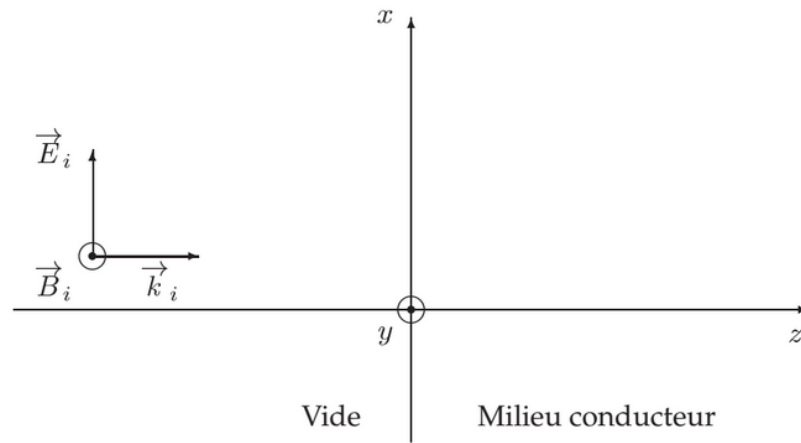


Figure 1: Onde électromagnétique en incidence normale sur un milieu conducteur

onde réfléchie :

$$\vec{E}_v(z, t) = E_i \exp(i(\omega t - k_0 z)) \vec{u}_x + E_r \exp(i(\omega t + k_0 z)) \vec{u}_x$$

$E_i$  et  $E_r$  désignent les amplitudes complexes des champs électriques des ondes incidente et réfléchie respectivement.

**2.4.1.** Déterminer les expressions du champ magnétique  $\vec{B}_i(z, t)$  de l'onde incidente et  $\vec{B}_r(z, t)$  de l'onde réfléchie. En déduire l'expression du champ magnétique résultant dans la région  $z < 0$ .

Dans le milieu conducteur ( $z > 0$ ), comme nous considérons que celui-ci s'étend jusqu'à l'infini, seule la solution qui décroît exponentiellement vers la droite est acceptable. On écrit le champ électrique de l'onde transmise sous la forme :

$$\vec{E}(z, t) = E_t \exp(i(\omega t - k z)) \vec{u}_x$$

$E_t$  étant l'amplitude complexe du champ électriques de l'onde transmise dans le milieu conducteur.

**2.4.2.** Déterminer l'expression du champ magnétique  $\vec{B}_t(z, t)$  de l'onde transmise dans le conducteur.

**2.4.3.** Écrire, sans les démontrer, les conditions que doivent vérifier les champs électrique et magnétique sur l'interface entre le vide et le milieu conducteur.

**2.4.4.** Établir les deux relations liant  $E_i$ ,  $E_r$  et  $E_t$ .

**2.4.5.** En déduire les expressions de  $E_r$  et  $E_t$  en fonction de  $E_i$ ,  $k_0$  et  $k$ .