

Propagation d'ondes dans un milieu plasma

I. Définition
Le plasma est un milieu gazeux dilué partiellement ou totalement ionisé : il constitue de cation supposé fixe (car elle sont trop massifs) et d'électrons de charge $-e$, de masse m et de densité particulaire $n = \frac{dN_e}{dV}$ (en m^{-3})

- Le plasma est supposé électriquement neutre ($n_b \text{ de cation} = n_b \text{ d'e}^-$)

$$\rightarrow p_{\text{tot}} = p_{(-)} + p_{(+)} = 0 \text{ (neutralité)} (*)$$

$$p_{(-)} = \frac{dq_{(-)}}{dV} = \frac{(-e) \cdot dN_{e^-}}{dV} = -n \cdot e$$

$$p_{(+)} = \frac{dq_{(+)}}{dV} = \frac{(+e) \cdot dN_{(+)}}{dV} = +n_{(+)} e$$

$$(*) \Rightarrow -n \cdot e + n_{(+)} e = 0 \Rightarrow n_{(-)} = n_{(+)}$$

2) Conductivité du plasma :

en présence d'une onde électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$, un e^- subit les forces suivantes $\vec{F}_{em} = \vec{F}_E + \vec{F}_m = -e\vec{E} + (-e)\vec{v}_e \wedge \vec{B}$

d'où la RFD appliquée à $1e^-$ dans ce cas :

$$m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E} + (-e)\vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

Composons les ordres de grandeur de $\vec{F}_E$ et $\vec{F}_m$.

$$\frac{|\vec{F}_m|}{|\vec{F}_E|} = \frac{+e |\vec{v}_e \wedge \vec{B}|}{+e |\vec{E}|} \approx \frac{|\vec{v}_e| \cdot |\vec{B}|}{|\vec{E}|} \text{ or } |\vec{B}| \approx \frac{|\vec{E}|}{c}$$

c'est une onde

$$\approx \frac{|\vec{v}_e|}{c} \ll 1$$

en effet : $|\vec{v}_e| \ll c$: Approximation non relativiste

ce qui implique $|\vec{F}_m| \ll |\vec{F}_E|$

$$\text{d'où } m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E}$$

En notation complexe $m\omega \underline{v}_e = -e \underline{E}$

$$\rightarrow \underline{v}_e = \frac{-e}{i m \omega} \underline{E} = i \frac{e}{m \omega} \underline{E}$$

Par conséquent, en interagissant avec l'onde électromagnétique, le plasma devient siège d'un courant électrique de valeur densité volumique

$$\underline{J} = \rho_{(-)} \underline{v}_e = -ne \underline{v}_e = -i \frac{ne^2}{m\omega} \underline{E}$$

Finalement, $\underline{J} = -i \frac{ne^2}{m\omega} \underline{E} = \underline{\chi}(\omega) \underline{E}$

tg $\underline{\chi}(\omega) = -i \frac{ne^2}{m\omega}$: conductivité complexe du plasma

Remarques:

* $\underline{\chi}(\omega)$ est imaginaire pure $\rightarrow \underline{J}$ et $\underline{E}$ sont en quadrature de phase (c-à-d $\Delta \varphi = \frac{\pi}{2}$)
donc s'apparente avec un retard

* $\underline{\chi}(\omega)$ est imaginaire pure $\rightarrow$ la puissance moyenne dissipée par effet Joule est nulle en effet, $\therefore \langle P^{vol} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \langle \underline{J} \cdot \underline{E}^* \rangle$

$$= \frac{1}{2} \text{Re} \langle \underline{\chi}(\omega) (\underline{E} \cdot \underline{E}^*) \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \text{Re} \langle \underline{\chi}(\omega) \cdot |\underline{E}|^2 \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \text{Re} \left\langle -i \frac{ne^2}{m\omega} |\underline{E}|^2 \right\rangle = 0$$

$\rightarrow$ Ce résultat est prévisible car le plasma est considéré comme diélectrique

* $|\underline{\chi}(\omega)| = \frac{ne^2}{m\omega}$

• $|\underline{\chi}(\omega)| \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \infty$: le plasma se comporte comme un conducteur

• $|\underline{\chi}(\omega)| \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$: $\underline{J} = \underline{0}$ $\rightarrow$ ϕ de courant du plasma

$\rightarrow$ ϕ d'interaction au plasma et l'onde
c'est due à la relation ultra rapide de l'onde

$\rightarrow$ le plasma se comporte comme un diélectrique

Etude de propagation de l'onde dans le plasma : (2)

Equation de propagation :

Dans le plasma supposé neutre les équations de Maxwell s'écrivent

$$(\nabla \cdot \vec{E}) = 0$$

$$(\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(\nabla \cdot \vec{B}) = 0$$

$$(\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$* \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\underbrace{\nabla (\nabla \cdot \vec{E})}_{=0} - \Delta \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = 0$$

$$\text{or } \vec{J} = \chi(\omega) \vec{E}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \chi(\omega) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (*)$$

L'équation d'onde dans le plasma

2/ Relation de dispersion :

Pour une OPPM tq: $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} \rightarrow z \rightarrow$

On a :

$$\bullet \Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E}$$

$$\bullet \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E}$$

$$\bullet \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}$$

$$(*) \Rightarrow -k^2 \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} - i\omega \mu_0 \chi(\omega) \vec{E} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E} \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - i\omega \mu_0 \chi(\omega) \right) = 0$$

$\vec{E} \neq 0$ sinon on n'ont pas une onde

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\omega \mu_0 \chi(\omega) \quad ; \quad \chi(\omega) = -i \frac{n e^2}{m \omega}$$

$$\rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\rho_0 n e^2}{m} = \frac{\omega^2 - \rho_0 c n e^2}{c^2} \quad \text{or } \mu_0 c^2$$

$$\rightarrow k^2 = \frac{\omega^2 - \frac{n e^2}{\epsilon_0 m}}{c^2}$$

En introduisant

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n e^2}{\epsilon_0 m}} \quad \text{pulsation plasma}$$

→ la relation de dispersion du plasma dépend de ω : $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$

→ cette relation est non linéaire, le plasma est donc un milieu dispersif.

(a) Cas où $\omega > \omega_p$:

dans ce cas $k^2 > 0 \Rightarrow k$ est réel pour

$$k = \pm \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$$

La solⁿ $-\frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$ est à rejeter car l'onde se propage vers $z \rightarrow$

finallement $k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$

Remarque :

la longueur d'onde λ dans le plasma peut s'exprimer en fait la longueur d'onde λ_0 dans le vide tq

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \left(\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \right)^{1/2}$$

or dans le vide $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c}$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \left(\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \left(\frac{\omega_p}{c} \right)^2 \right)^{1/2} = \left(\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2 - \left(\frac{\omega_p}{c} \right)^2 \right)^{1/2}$$

d'où d'infct de λ_0 .

i/ vitesse de phase.

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k}$$

On a $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \rightarrow \frac{k^2}{\omega^2} = \frac{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2}{c^2}$

d'où $v_{\phi} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2}}$

Vitesse de groupe

$$V_g = \frac{d\omega}{dk}$$

$$d(\omega) \Rightarrow \frac{d\omega}{dk} dk = \frac{\omega d\omega}{c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d\omega}{dk} \cdot \frac{\omega}{k} = c^2 = v_e \cdot v_g$$

$$\boxed{v_g = \frac{c^2 \cdot k}{\omega}} \Rightarrow \boxed{v_e \cdot v_g = c^2} \quad \text{par } \frac{1}{\omega} \text{ valable}$$

$$\text{d'où } v_g = \frac{c^2}{v_e} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

Remarque

- * v_g et k dépend de $\omega \rightarrow$ on retrouve encore que le plasma est un milieu dispersif. (chaque ω est associé à une vitesse)
- * $\odot v_e \geq c$: ce résultat ne doit être étendue de moment que v_e et la vitesse de propagation d'OPN. Lequel n'a pas l'existence physique réel (pourquoi l'OPN n'existe pas ? car l'OPN est une fonction cos et le cos n'atteint pas l'énergie infinie)
- * $\odot v_g \leq c$: en effet ; v_g est la vitesse de propagation de l'énergie.

* Pour $\omega \rightarrow \infty$ on obtient $v_e \leq v_g \leq c$

dans ce cas on retrouve que le plasma est vide.

(b) cas où $\omega_p > \omega$:

dans ce cas $k^2 < 0$

$$\text{Soit alors } k^2 = -\frac{1}{d^2} < 0 ; \quad \frac{1}{d^2} = \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2} > 0$$

$$k^2 = \left(\frac{i}{d}\right)^2$$

$$\Rightarrow k = \pm \frac{i}{d}$$

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} \\ &= \vec{E}_0 \exp(i\omega t - \frac{1}{d}z) \\ &= \vec{E}_0 e^{+i\omega t} e^{-z/d}\end{aligned}$$

$$|\vec{E}| = |\vec{E}_0| e^{+z/d} \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} +\infty$$

impossible

d'où le solⁿ " $+\frac{i}{d}$ " est à rejeter

Finalement, on a

$$\begin{aligned}k &= \frac{i}{d} = -i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} = -i \sqrt{\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 - 1} \cdot \frac{\omega}{c} \\ &= -ik_0 \sqrt{\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 - 1}\end{aligned}$$

Dans ce cas, le champ élect s'écrit

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 \exp i(\omega t - kz) \\ &= \vec{E}_0 \exp i(\omega t + i\omega z/d)\end{aligned}$$

$$\text{soit } \boxed{\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 e^{-\omega z/d} e^{i\omega t} \\ \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{-\omega z/d} \cos(\omega t)\end{aligned}}$$

~~ne se propage pas~~

on remarque que, pour $\omega < \omega_p$ (c'est pour $k^2 < 0$),
l'onde est stationnaire : elle ne se propage pas dans le milieu.

il vient alors que : $\boxed{k^2 > 0}$ constitue une condition de propagation

Par conséquent, le plasma joue le rôle d'un filtre passe

métalliques

II Propagation d'onde dans un conducteur réel :

1) Neutralité électrique du conducteur

On suppose que initialement le conducteur métallique porte une perturbance charge électrique répartis en volume avec la densité volumique $\rho(0)$ d'une onde $(\vec{E}, \vec{B})$ on desire montrer qu'on présence d'une onde $(\vec{E}, \vec{B})$ ces charges initiales vont disparaître en volume, elles vont migrer vers la surface.

en effet, en présence de l'onde $(\vec{E}, \vec{B})$ le conducteur devient siège d'un courant de densité vel $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

(où γ : conducteur il. du métal)

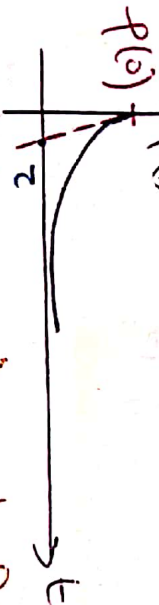
Éq locale de conservation de charges : $\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{div}(\gamma \vec{E}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \rightarrow \gamma \text{div} \vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \rightarrow \gamma \cdot \frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho = 0 \quad \text{avec } \frac{\gamma}{\epsilon_0} = \frac{1}{\tau}$$

↳ Éq diff. régissant la variation de ρ au cours du temps (en présence de l'onde).

$$\rho(x, t) = \rho(0) e^{-\frac{t}{\tau}}$$



si $t \rightarrow \tau$ ($t \rightarrow +\infty$) on a : $\rho(t) \approx 0$

γ , en onde de grandeur, on a pour la cuivre ($\gamma(\text{cu}) \approx 10^7 \text{ S.m}^{-1}$)
 $\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma} \approx \frac{10^{-12}}{10^7} \approx 10^{-19} \text{ s} \ll 1$

τ est tellement faible qu'on peut dire que :

à $t \approx 0$ $\rho(t) = 0$

↳ les charges initialement présente en volume vont migrer vers la surface du conducteur.

② Equation de propagation dans le conducteur.
 on se propose les ondes qui se propagent vers $z \uparrow$ d'onde dans le conducteur tel que $\vec{E}(r,t) = \vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}$
 les equations de Maxwell dans le conducteur s'ecrivent :

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \vec{E}) : \text{div } \vec{E} &= 0 & (\nabla \times \vec{E}) : \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ (\nabla \cdot \vec{B}) : \text{div } \vec{B} &= 0 & (\nabla \times \vec{B}) : \text{rot } \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

dans cette etude, on se limitera au domaine des ondes radio $\omega \leq 10^{15} \text{ rad/s}$
 dans ce cadre d'etude, on peut montrer qu'on peut negliger $|\vec{J}_D|$ devant $|\vec{J}|$ au sein du conducteur.

en effet, $\frac{|\vec{J}_D|}{|\vec{J}|} = \frac{|\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}|}{|\gamma \vec{E}|} = \frac{|\omega \epsilon_0 \vec{E}|}{|\gamma \vec{E}|} = \frac{\epsilon_0 \omega}{\gamma} = \tau \cdot \omega$

Pour $\tau \sim 10^{-19} \text{ s}$ et $\omega \leq 10^{15} \text{ rad/s}$

$$\Rightarrow \frac{|\vec{J}_D|}{|\vec{J}|} \leq 10^{-4} \Rightarrow |\vec{J}_D| \ll |\vec{J}|$$

on est bien dans le cadre de l'ARQS

Ainsi, $(\nabla \times \vec{B}) : \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} = \mu_0 \gamma \vec{E}$

* L'equation de propagation :

$$\begin{aligned} \text{rot}(\nabla \times \vec{E}) : \text{rot}(\text{rot } \vec{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \Rightarrow \Delta \vec{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \vec{0} \quad : \text{eq d'onde dans le conducteur} \end{aligned}$$

③ Relation de dispersion et structure de l'onde

ona une OPPN d'où $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E}$ et $\Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E}$

d'où (H) $\Rightarrow -k^2 \vec{E} - \mu_0 \gamma i\omega \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow -\vec{E}(k^2 + \mu_0 \gamma i\omega) = \vec{0}$

$\Rightarrow \boxed{k^2 = -i \mu_0 \gamma \omega}$ Relation de dispersion dans le cond (milieu dissipatif)

On remarque que $-k = \frac{(1-i)\omega}{2}$

$$\rightarrow k^2 = \frac{(1-i)^2}{2} \mu_0 \epsilon_0 \omega^2$$

$$\rightarrow k^2 = \left[(1-i) \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0 \omega^2}{2}} \right]^2$$

Soit $\sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0 \omega^2}{2}} = \frac{1}{\delta} \rightarrow k^2 = \left(\frac{1-i}{\delta} \right)^2$

Soit alors $k = \pm \frac{1-i}{\delta}$

or, par $k = -\frac{(1-i)}{\delta}$ on aurait $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t + \frac{1-i}{\delta} z)} = \vec{E}_0 e^{+\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t + \frac{z}{\delta})}$$

$$\rightarrow |\vec{E}| = |\vec{E}_0| e^{+\frac{z}{\delta}} \rightarrow +\infty \quad (\text{impossible})$$

d'où " $k = -\frac{(1-i)}{\delta}$ " est à rejeter

Finalement, on obtient :

$$k = + \frac{1-i}{\delta}$$

* Structure de l'onde :

(i) Le champ électrique :

On remplace $k = \frac{1-i}{\delta}$ dans $\vec{E}$, on obtient :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta})$$

terme de retard $\rightarrow$ il y a propagation

Cette onde est progressive vers les $z \rightarrow \perp \vec{z}$: c'est $\vec{z}$ fixe

à la vitesse de phase $v_e = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\delta}$

• même n'a pas terme de retard dans la phase

$v_e = \delta \omega$,

et elle est plane.

$\Rightarrow$ stationnaire

(ii) Champ magnétique :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \left(\frac{1-i}{\delta} \right) \vec{u}_z \wedge \vec{E} = \left(\frac{1-i}{\delta \omega} \right) (\vec{u}_z \wedge \vec{E})$$

$$\vec{B} = \frac{1-i}{\delta \omega} e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})} \cdot (\vec{u}_z \wedge \vec{E}_0)$$

par exemple : si $\vec{E}_0 = E_0 \vec{u}_x$
 $\rightarrow \vec{B} = \frac{(1-i)}{8\omega} \cdot E_0 e^{-z/8} e^{i(\omega t - z/8)} \vec{u}_y$

* $\vec{B} = \text{Re}(\vec{B})$
 $\vec{B} = \frac{1}{8\omega} E_0 e^{-z/8} \left[\cos(\omega t - z/8) + \sin(\omega t - z/8) \right] \vec{u}_y$

iii) Aspects énergétiques moyens :

L'onde est plane d'air :

• $\langle \vec{T} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right)$
 $= \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \left(\vec{E}_0 e^{-z/8} e^{i(\omega t - z/8)} \cdot \frac{(1-i)^*}{8\omega} E_0 e^{-z/8} e^{-i(\omega t - z/8)} \right)$
 $= \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \left(\frac{E_0^2}{8\omega} e^{-2z/8} \cdot \underbrace{(1-i)^*}_{(1+i)} \right) \vec{u}_z$
 $= \frac{1}{2\mu_0} \frac{E_0^2}{8\omega} e^{-2z/8} \vec{u}_z$

• $\langle P_{\text{ray}} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\vec{j} \cdot \vec{E}^* \right)$
 $= \frac{1}{2} \text{Re} \left(\gamma \vec{E} \cdot \vec{E}^* \right)$
 $= \frac{1}{2} \text{Re} \left(\gamma |\vec{E}|^2 \right)$
 $= \frac{\gamma}{2} |\vec{E}|^2 = \frac{\gamma}{2} E_0^2 e^{-2z/8}$

• $\langle \epsilon \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \vec{E} \cdot \vec{E}^* \right)$
 $= \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 \right)$
 $= \frac{\epsilon_0}{4} |\vec{E}|^2$
 $= \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2 e^{-2z/8}$

• $\langle \mu \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\vec{B} \cdot \vec{B}^*}{2\mu_0} \right)$
 $= \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0} \right)$
 $= \frac{|\vec{B}|^2}{4\mu_0} = \frac{1}{4\mu_0} \left(\frac{E_0^2}{8^2 \omega^2} |1-i|^2 e^{-2z/8} \right)$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \frac{t_0}{s^2 \omega^2} e^{-z/\delta}, \quad |1-i| = \sqrt{2}$$
$$= \frac{1}{2\mu_0} \epsilon_0^2 \cdot \frac{\mu_0 \gamma}{2\omega} e^{-z/\delta}, \quad \frac{1}{s^2} = \frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}$$
$$\rightarrow \frac{1}{s^2 \omega^2} = \frac{\mu_0 \gamma}{2\omega}$$
$$= \frac{\gamma \epsilon_0^2}{4\omega} e^{-z/\delta}$$

On n'est pas équilibré de deux énergies c'd (e ≠ em)
- car on n'est pas dans le vide ($\frac{1}{s} = \frac{\vec{v}_2}{c} \frac{1}{\epsilon}$)

Remarque 1:

* On a en :
 $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)}$: champ électrique dans le conducteur
 $|\vec{E}| = |\vec{E}_0| e^{-z/\delta} \xrightarrow[\delta \gg \delta]{\delta \rightarrow +\infty} 0$

→ L'onde n'existe dans le conducteur (réel) que sur quelques δ .
↑
métallique

Ordre de grandeur :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} = \sqrt{\frac{1}{\pi \mu_0 \gamma V}}, \quad \omega = 2\pi V$$
$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$$
$$\gamma(\text{Cu}) = 6,8 10^7 \text{ S m}^{-1}$$
$$\text{Pour } V = 10 \text{ kHz} = 10^4 \text{ Hz} \rightarrow \delta \approx \left(\frac{1}{10^{-7} 10^7 10^4} \right)^{1/2}$$
$$\rightarrow \delta \approx 10^{-2} \text{ m} = 1 \text{ cm}$$

$V = 10 \text{ kHz}$

$$\text{Pour } V = 10 \text{ MHz} = 10^6 \text{ Hz}$$
$$\rightarrow \delta \approx \left(\frac{1}{10^{-7} 10^7 10^6} \right)^{1/2} \approx 10^{-3} \text{ m} = 1 \text{ mm}$$

$V = 10 \text{ MHz}$

δ caractérise la profondeur de pénétration de l'onde dans le cond. Elle est appelée "épaisseur de peau", et on parle ici

de "l'effet de peau".

** Cas particulier d'un cond. parfait :

Par définition un cond. parfait est tq $\gamma \rightarrow +\infty$

Conséquence :

i/ $\delta \rightarrow 0$: une onde e.m. ne peut pas pénétrer à l'intérieur d'un cond. parfait

Autrement

$$i/ P_J^{vol} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma (\vec{E} \cdot \vec{E}) = \gamma \cdot E^2$$

— comme $\gamma \rightarrow +\infty$, il faut impérativement que $E = 0$ sinon on aurait $P_J^{vol} \rightarrow \infty$ (impossible).

Remarque e/ :

Pour un vecteur d'onde complexe :

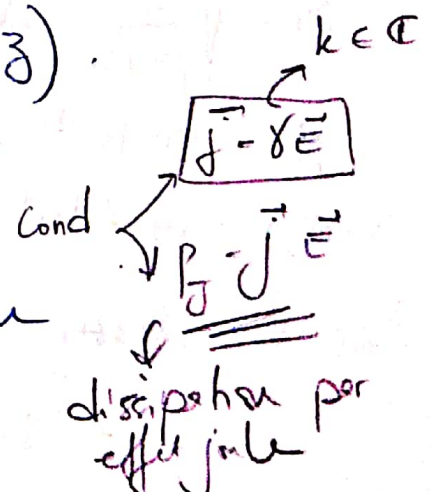
$$k = k_R + i k_I \quad ; \quad \begin{cases} k_R = \text{Re}(k) > 0 \\ k_I = \text{Im}(k) > 0 \end{cases}$$

on obtient ;
$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - k z)) \\ &= \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - (k_R + i k_I) z)) \\ &= \vec{E}_0 e^{-k_I z} e^{i(\omega t - k_R z)} \end{aligned}$$

Ainsi on peut conclure que

* $\text{Re}(k) = k_R$: traduit la propagation de l'onde c'è $V_{ph} = \frac{\omega}{\text{Re}(k)}$

* $\text{Im}(k) = k_I$: traduit la dissipation = v. l'onde par effet joule dans le milieu de l'énergie électromagnétique de l'onde lequel se manifeste à travers, l'atténuation exponentielle de l'amplitude de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$.



réflexion d'une onde sur un conducteur parfait

1) Relations de passage

on suppose que l'espace est divisé en 2 sous-espace ① et ② séparé par une surface S qui porte des charges et des courants de densités surfaciques respectives $\sigma, \vec{j}_s$

soit $\vec{T}$ un vecteur unitaire tangent à cette surface et $\vec{n}_{1,2}$ un vecteur unitaire qui lui est normal et qui est dirigé de 1 $\rightarrow$ 2.

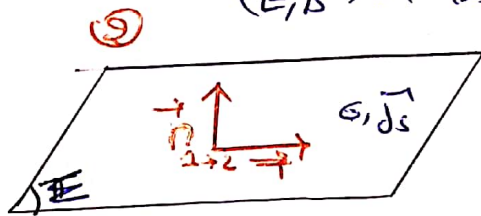
si une onde électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ régit dans tout cet espace, on admet alors qu'au voisinage immédiat de S le champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ vérifie les conditions limites suivantes appelées relation de passage.

$$\vec{E}_{(2)} - \vec{E}_{(1)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad \textcircled{a}$$

$$\vec{B}_{(2)} - \vec{B}_{(1)} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad \textcircled{b}$$

$(\vec{E}, \vec{B})$ dans tout l'espace :

$$(\vec{E}, \vec{B}) = (\vec{E}_{(2)}, \vec{B}_{(2)})$$



$$(\vec{E}, \vec{B}) = (\vec{E}_{(1)}, \vec{B}_{(1)})$$

tel que

$$\begin{cases} \vec{E} = E_T \vec{T} + E_{n12} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{B} = B_T \vec{T} + B_{n12} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \end{cases}$$

Alternativement

$$\textcircled{a} \quad \vec{T} \rightarrow E_{(2)T} - E_{(1)T} = 0 \quad \textcircled{a'}$$

$$\textcircled{a} \quad \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \rightarrow E_{(2)n12} - E_{(1)n12} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \textcircled{a''}$$

$$\textcircled{a} \Leftrightarrow \begin{cases} \textcircled{a'} : \text{La composante tangentielle de } \vec{E} \text{ est continue au niveau } S \\ \text{et} \\ \textcircled{a''} : \text{La composante normale de } \vec{E} \text{ est discontinue à la traversée de } S \end{cases}$$

* ⑤. $\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \Rightarrow B_{(2)N} - B_{(1)N} = 0$ (b')

⑥. $\vec{T} \Rightarrow B_{(2)T} - B_{(1)T} = (\mu_0 \int_S \wedge \vec{n}_{12}) \cdot \vec{T} \neq 0$ (b'')

⑥ $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{(b')} : \text{La composante normale de } \vec{B} \text{ est continue au niveau de } \varepsilon \\ \text{(b'')} : \text{La composante Tangentielle de } \vec{B} \text{ est discontinue à la traversée de } \varepsilon. \end{cases}$