

Interférences par division du front d'onde

Introduction

I Dispositif interférentiel des fentes d'Young

Ce système est constitué de deux fentes identiques (supposées ici très fines) percées dans un écran opaque, parallèles et distantes de a faible (figure 1.1(a)). Elles sont éclairées par une source de lumière S supposée ponctuelle et monochromatique (de longueur d'onde λ).

Atteintes par la lumière, les deux fentes jouent alors le rôle de deux sources secondaires qu'on notera S_1 et S_2 . Ainsi, les faisceaux lumineux issus de ces dernières se croisent sur une zone commune de l'espace. Cette zone constitue la zone d'interférences (figure 1.1(b)).

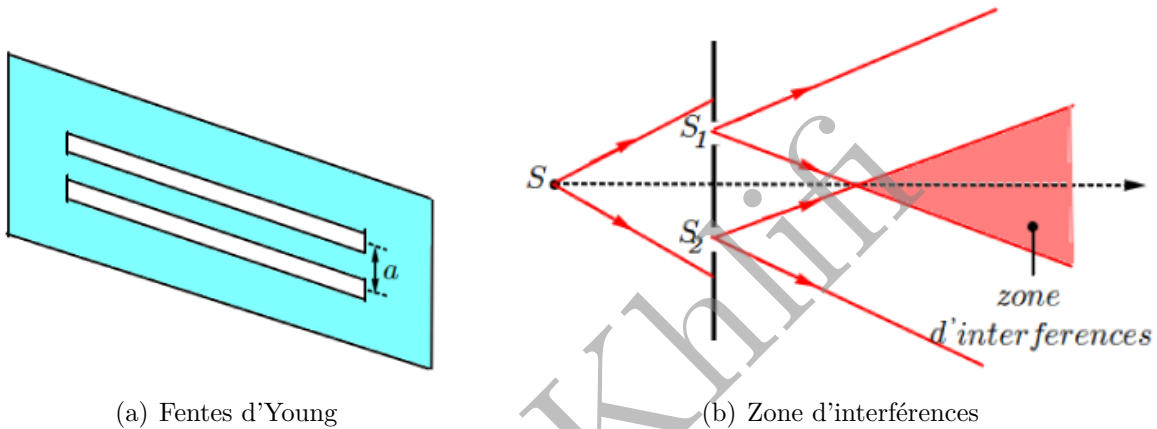


Figure 1.1

I.1 Hyperboloïdes d'interférences

Pour deux rayons lumineux, de même intensité I_0 , issus de S et passant par les deux fentes avant d'interférer en un point M de l'espace, l'intensité lumineuse s'écrit :

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta(M)\right) \right)$$

où $\delta(M)$ désigne la différence de marche entre les deux ondes en M .

Les franges d'interférences sont telles que : $I(M) = cte$, soit $\delta(M) = cte$;

$$\begin{aligned}\delta(M) = [SS_2M] - [SS_1M] &= ([SS_2] + [S_2M]) - ([SS_1] + [S_1M]) \\ &= n \cdot (SS_2 + S_2M) - n \cdot (SS_1 + S_1M) \\ &= S_2M - S_1M\end{aligned}$$

où on a supposé que le dispositif est plongé dans le vide d'indice $n = 1$ et que la source S est située sur la médiane du segment $[S_1S_2]$.

Par conséquent, les franges d'interférences sont telles que :

$$S_2M - S_1M = cte$$

La relation précédente définit dans l'espace une famille d'hyperboloïdes de foyers S_1 et S_2 .

L'intersection de ces hyperboloïdes avec un écran d'observation donne :

- des franges circulaires, si l'écran est placé perpendiculairement à la droite (S_1S_2)
- sinon, des hyperboles qu'on peut assimiler à des droites, si l'écran est placé parallèlement à la droite (S_1S_2)

I.2 Calcul de la différence de marche

On suppose ici qu'un écran d'observation est placé parallèlement à la droite (S_1S_2) à une distance D des deux fentes très grande devant leur écartement a . La source primaire S , située sur la médiane de $[S_1S_2]$, est supposée ponctuelle et émet une radiation monochromatique de longueur d'onde λ . L'ensemble est plongé dans le vide d'indice optique $n = 1$ (figure 1.2).

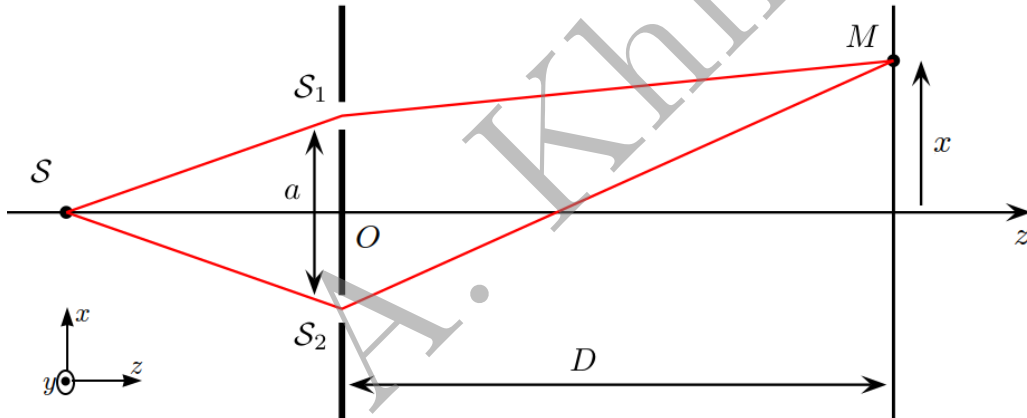


Figure 1.2

Avec : $S_1(a/2, 0, 0)$, $S_2(-a/2, 0, 0)$ et $M(x, y, D)$ en coordonnées cartésiennes, il vient

que :

$$\begin{aligned}
 S_1 M &= \left[\left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + y^2 + D^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= D \cdot \left[1 + \frac{\left(x - \frac{a}{2} \right)^2}{D^2} + \frac{y^2}{D^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &\simeq D \cdot \left[1 + \frac{\left(x - \frac{a}{2} \right)^2}{2D^2} + \frac{y^2}{2D^2} \right] \\
 &= D + \frac{x^2 - ax + a^2/4}{2D} + \frac{y^2}{2D}
 \end{aligned}$$

De la même manière, on établit que :

$$S_2 M \simeq D + \frac{x^2 + ax + a^2/4}{2D} + \frac{y^2}{2D}$$

Il s'en suit enfin que la différence de marche au point M de l'écran entre les deux ondes issues de S s'écrit :

$$\delta(M) = S_2 M - S_1 M = \frac{ax}{D} \quad (1.1)$$

I.3 Figure d'interférence

L'intensité résultante en un point M de l'écran des interférences des deux ondes issues de S s'écrit :

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{ax}{D} \right) \right) \quad (1.2)$$

- Les franges d'interférences sont telles que :

$$I(M) = cte \iff \delta(M) = cte \iff \boxed{x = cte}$$

Il s'agit alors de franges rectilignes (*i.e.* des droites) perpendiculaires à la droite $(S_1 S_2)$.

- L'ordre d'interférences en M s'écrit : $p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda} = \frac{ax}{\lambda D}$
- L'interfrange i est tel que : $i = \Delta x \rfloor_{\Delta p=1}$, avec $\Delta p = \frac{a \cdot \Delta x}{\lambda D}$, soit alors :

$$\boxed{i = \frac{\lambda D}{a}}$$

Pour $\lambda = cte$ on a $i = cte \longrightarrow$ les franges d'interférences sont équidistantes.

- Les franges brillantes sont telles que : $p(M) = n$ (entier), ce qui correspond alors aux positions x_n suivantes sur l'écran d'observation :

$$x_n = n \cdot \frac{\lambda D}{a}$$

Les franges sombres, quant à elles, sont telles que $p(M) = m + \frac{1}{2}$ (demi-entier), ce qui correspond alors aux positions x_m suivantes sur l'écran d'observation :

$$x_m = \left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\lambda D}{a}$$

On retrouve que : $x_{n+1} - x_n = x_{m+1} - x_m = i = \frac{\lambda D}{a}$

Compte tenu de l'expression de l'interfrange i , l'intensité $I(M)$ résultante sur l'écran (1.2) peut se réécrire comme suit :

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(2\pi \cdot \frac{x}{i} \right) \right)$$

ce qui correspond à l'allure représentée sur la figure 1.3 suivante en fonction de l'abscisse x sur l'écran :

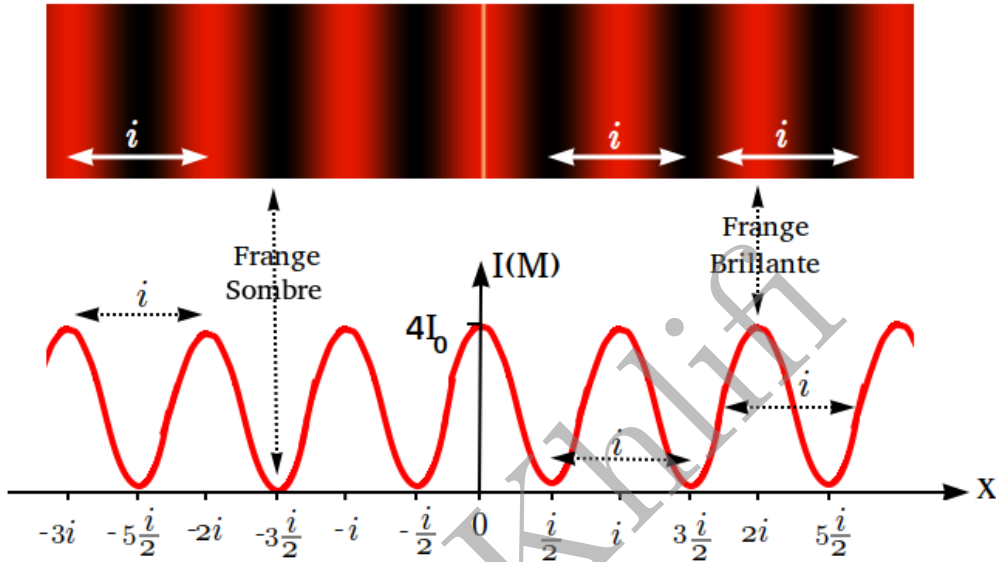


Figure 1.3: Interférences de deux ondes lumineuses ($\lambda = \lambda_{\text{rouge}}$) : aspect de l'écran d'observation (en haut), et allure de la courbe de l'intensité résultante $I(x)$ (en bas). Les positions des franges brillantes et sombres sont indiquées ainsi que l'interfrange i

II Interférences avec une source bichromatique

On considère ici la situation où la source primaire S est ponctuelle mais elle émet deux radiations de pulsations différentes ω_1 et $\omega_2 \neq \omega_1$ (i.e. $\lambda_1 \neq \lambda_2$) qui sont cependant infiniment voisines.

On introduit alors les quantités suivantes :

- λ_0 : la longueur d'onde moyenne ($\lambda_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$)
- $\Delta\lambda$: l'écart spectral en longueur d'onde ($\Delta\lambda \ll \lambda_1, \lambda_0$ et λ_2 , du moment que les radiations sont très voisines $\lambda_1 \approx \lambda_0 \approx \lambda_2$)

Comme deux radiations différentes ne peuvent pas interférer (conditions d'interférences non remplies), il s'en suit que chaque longueur d'onde va donner sur l'écran sa propre figure d'interférences avec sa propre valeur d'interfrange i (qui dépend de λ). Les deux figures d'interférences se superposeront simplement sur l'écran (i.e. l'une sur l'autre) avec un décalage quant aux positions des franges brillantes et sombres de chaque figure (dû au fait que les interfranges diffèrent : $i_1 \neq i_2$).

Ce décalage fera en sorte que, sur l'écran d'observation, il y aura des endroits où les interférences seront nettement observées (contraste maximal), et d'autres où elles seront floues et brouillées (perte de contraste).

Dans la suite, on déterminera analytiquement les positions de ces endroits.

II.1 Intensité résultante

La raie de longueur d'onde λ_1 donne sur l'écran sa propre figure d'interférences avec une intensité $I_1(M)$ donnée par (expression (1.2)) :

$$I_1(M) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta(M)}{\lambda_1}\right) \right)$$

De même, la raie de longueur d'onde λ_2 donne sur l'écran sa propre figure d'interférences avec une intensité $I_2(M)$ donnée par :

$$I_2(M) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta(M)}{\lambda_2}\right) \right)$$

Les deux raies ne sont pas isochrones, elles n'interfèrent pas entre elles et on obtient alors sur l'écran une intensité résultante $I(M)$ donnée par la simple somme des deux intensités :

$$\begin{aligned} I(M) = I_1(M) + I_2(M) &= 2I_0 \left[2 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_1}\right) + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_2}\right) \right] \\ &= 2I_0 \left[2 + 2 \cdot \cos\left(\pi\delta \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\right) \cdot \cos\left(\pi\delta \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)\right) \right] \\ &= 4I_0 \left[1 + \cos\left(\pi\delta \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\right) \cdot \cos\left(\pi\delta \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)\right) \right] \\ &= 4I_0 \left[1 + \cos\left(\pi\delta \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \cdot \lambda_2}\right)\right) \cdot \cos\left(\pi\delta \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \cdot \lambda_2}\right)\right) \right] \end{aligned}$$

où nous avons profité de la relation trigonométrique : $\cos a + \cos b = 2 \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) \cos \left(\frac{a-b}{2} \right)$.

Comme $\lambda_1 \approx \lambda_0 \approx \lambda_2$ il s'en suit que $\lambda_1 + \lambda_2 \approx 2\lambda_0$ et $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \approx \lambda_0^2$.

Encore, comme $\lambda_2 - \lambda_1 = \Delta\lambda$, il vient enfin -en remplaçant dans le calcul précédent- que :

$$\begin{aligned} I(M) &= 4I_0 \left[1 + \cos \left(\pi \delta \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \right) \right) \cdot \cos \left(\pi \delta \left(\frac{2\lambda_0}{\lambda_0^2} \right) \right) \right] \\ &= 4I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{\pi \Delta\lambda}{\lambda_0^2} \cdot \delta \right) \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \delta \right) \right] \end{aligned}$$

En introduisant la fonction $V(\delta)$ suivante, appelée facteur de visibilité :

$$V(\delta) = \cos \left(\frac{\pi \Delta\lambda}{\lambda_0^2} \cdot \delta \right)$$

on peut finalement écrire l'intensité résultante des interférences obtenues avec une source de lumière bichromatique comme :

$$I(M) = 4I_0 \cdot \left[1 + V(\delta) \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \delta \right) \right] \quad (1.3)$$

II.2 Étude du facteur de visibilité $V(\delta)$

La fonction $V(\delta)$ est périodique de période spatiale $p_V = \frac{2\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$.

- $V(\delta) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\pi \Delta\lambda}{\lambda_0^2} \cdot \delta = (n + \frac{1}{2})\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}$, soit $\delta_n = (n + \frac{1}{2}) \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$
- $V(\delta) = \pm 1 \quad \longrightarrow \quad \frac{\pi \Delta\lambda}{\lambda_0^2} \cdot \delta = m \cdot \pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$, soit $\delta_m = m \cdot \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$

d'où la courbe 1.4 suivante pour $V(M)$:

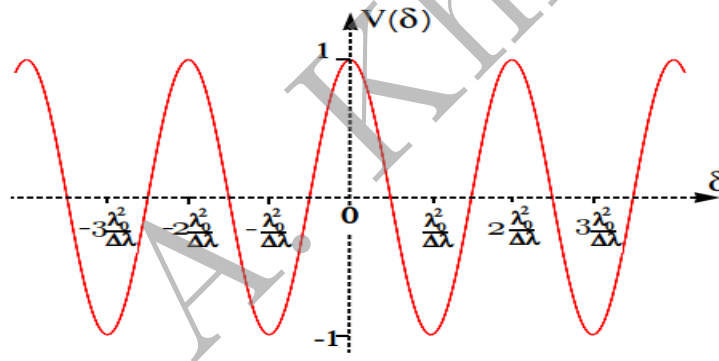


Figure 1.4: Courbe du facteur de visibilité $V(\delta)$ en fonction de la différence de marche $\delta(M)$

II.3 Figure d'interférences

II.3.1 Contraste de la figure d'interférences

Dans l'expression 1.3 de l'intensité résultante, un produit de deux fonctions cosinus apparaît : $V(\delta)$ de période spatiale $p_V = \frac{2\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta\right)$ de période spatiale λ_0 .

Comme $\Delta\lambda \ll \lambda_0$ il vient que $p_V = \frac{2\lambda_0^2}{\Delta\lambda} \gg \lambda_0$ et, par conséquent, la courbe de $V(\delta)$ joue le rôle d'une enveloppe pour la courbe de $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta\right)$.

Les franges brillantes sont telles que l'ordre d'interférences est entier : $p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_0} = n$, soit alors d'intensité :

$$I_{max}(\delta) = 4I_0 \left(1 + |V(\delta)|\right)$$

Quant aux franges sombres, elles sont telles que l'ordre d'interférences est demi-entier : $p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_0} = m + \frac{1}{2}$, soit alors d'intensité :

$$I_{min}(\delta) = 4I_0 \left(1 - |V(\delta)|\right)$$

Où, on a pris soin de ne pas oublier de mettre la valeur absolue sur le terme $V(\delta)$ afin d'éviter d'obtenir un facteur de contraste négatif de la figure d'interférences. En effet, ce dernier est toujours positif et s'écrit dans ce cas :

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = |V(\delta)|$$

et sa courbe représentative est donnée sur la figure 1.5 ci-bas :

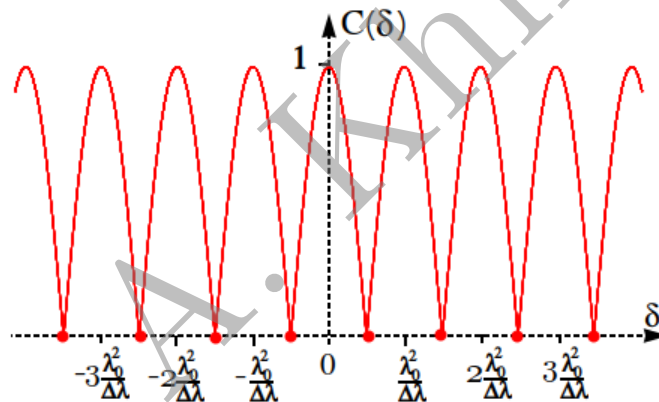


Figure 1.5: Courbe de contraste en fonction de la différence de marche $\delta(M)$

Il est nettement remarquable sur la figure 1.5 que

- Pour certains points M de l'écran d'observation (*i.e.* certaines valeurs de $\delta(M)$) le contraste est maximal, $C = 1$ et par conséquent, la figure d'interférences est très nette. Conformément à l'étude faite au paragraphe précédent sur le facteur de visibilité, ces points sont tels que :

$$\delta_n = n \cdot \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

En effet, en ces points, une frange brillante correspondante à λ_1 coïncide avec une frange brillante correspondante à λ_2 (ou encore une frange sombre de λ_1 avec une frange sombre de λ_2) : on dit alors qu'on a coïncidence.

- Pour certains points M de l'écran d'observation (*i.e.* certaines valeurs de $\delta(M)$) le contraste est nul, $C = 0$ et par conséquent, la figure d'interférences est complètement brouillée (*i.e.* brouillage des interférences). Ces points sont tels que :

$$\delta_n = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

En effet, en ces points, une frange brillante correspondante à λ_1 se superpose à une frange sombre correspondante à λ_2 (ou l'inverse) : on dit alors qu'on a anti-coïncidence.

II.3.2 Courbe d'intensité

La courbe de $I(M)$ est représentée sur la figure 1.6 ci-dessous : Il s'agit d'un phénomène de

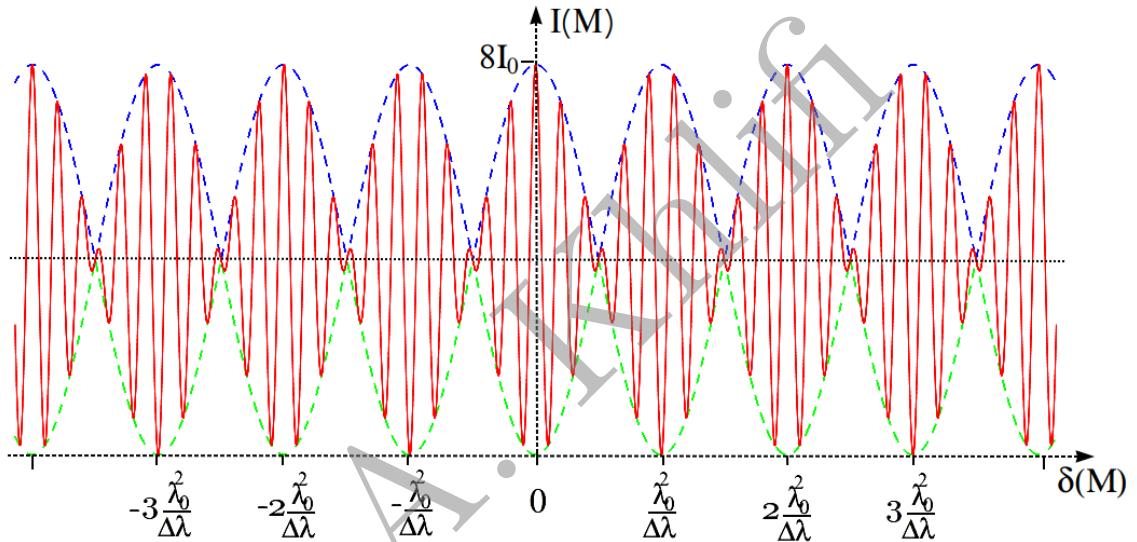


Figure 1.6: Courbe d'intensité en fonction de la différence de marche $\delta(M)$ (courbe rouge). La courbe en traits bleus discontinus représente celle des franges brillantes $I_{\max}(\delta)$, tandis que la courbe en traits verts discontinus représente celle des franges sombres $I_{\min}(\delta)$

battement optique : c'est une alternance entre des ventres, pour lesquels le contraste est maximal $C = 1$ et des nœuds, pour lesquels le contraste est nul $C = 0$.

III Interférences avec une source polychromatique : cohérence temporelle

On suppose maintenant que les deux fentes d'Young sont éclairées par une source primaire S ponctuelle mais polychromatique. Elle émet, de manière continue, des radiations sur toute une plage de fréquence $[\nu_1, \nu_2]$ de largeur $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$ et centrée sur une fréquence moyenne ν_0 . Pour une émission uniforme dans l'intervalle $[\nu_1, \nu_2]$, la source est dite à profil rectangulaire. Le spectre d'émission d'une telle source (appelé aussi profil de raie) est représenté sur la figure 1.7 ci-dessous

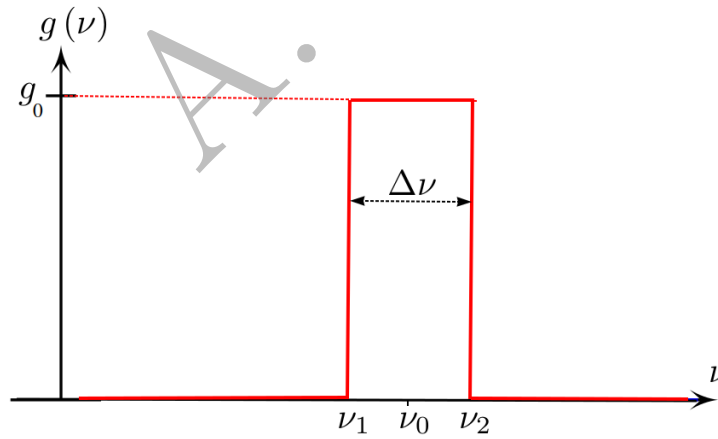


Figure 1.7: Spectre d'émission d'une source à profil rectangulaire

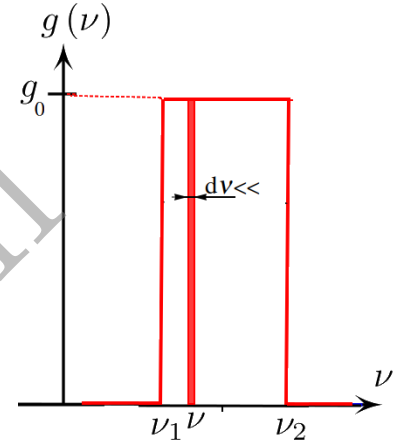
où $g(\nu)$ désigne la densité spectrale d'intensité émise par la source ($g(\nu) = dI_0/d\nu$), de sorte que l'intensité totale I_0 émise dans l'intervalle $[\nu_1, \nu_2]$ s'écrit :

$$I_0 = \int_{\nu_1}^{\nu_2} g(\nu) d\nu = g_0 \cdot \Delta\nu$$

III.1 Intensité résultante

Une radiation émise par S de fréquence ν quelconque dans l'intervalle $[\nu_1, \nu_2]$ et de largeur $d\nu$ infiniment faible peut être approximée à une radiation quasi-monochromatique (figure ci-contre). Par conséquent, elle donne en un point M de l'écran d'observation sa propre figure d'interférences d'intensité $dI(M)$ donnée par :

$$\begin{aligned} dI(M) &= 2.dI_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right) \right] \\ &= 2.dI_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\nu\delta}{c}\right) \right] \end{aligned}$$



où -par soucis d'allègement- nous avons noté δ tout court au lieu de $\delta(M)$.

En remplaçant $dI_0 = g(\nu)d\nu = g_0 d\nu = \frac{I_0}{\Delta\nu} d\nu$ dans l'expression précédente on obtient :

$$dI(M) = 2 \frac{I_0}{\Delta\nu} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\nu\delta}{c}\right) \right] d\nu$$

Comme des radiations de fréquences ν différentes ne peuvent pas interférer (non isochrones), l'intensité totale observée sur l'écran est enfin la simple somme des intensités $dI(M)$ données par les différentes fréquences ν , soit :

$$\begin{aligned} I(M) &= \int_{\nu_1}^{\nu_2} dI(M) = 2 \frac{I_0}{\Delta\nu} \int_{\nu_1}^{\nu_2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\nu\delta}{c}\right) \right] d\nu \\ &= 2 \frac{I_0}{\Delta\nu} \left\{ \Delta\nu + \left[\frac{\sin(2\pi\delta\nu/c)}{2\pi\delta/c} \right]_{\nu=\nu_1}^{\nu=\nu_2} \right\} \\ &= 2 \frac{I_0}{\Delta\nu} \left\{ \Delta\nu + \left[\frac{\sin(2\pi\delta\nu_2/c) - \sin(2\pi\delta\nu_1/c)}{2\pi\delta/c} \right] \right\} \end{aligned}$$

Moyennant la relation trigonométrique : $\sin a - \sin b = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$, il vient que :

$$\begin{aligned} I(M) &= 2 \frac{I_0}{\Delta\nu} \left\{ \Delta\nu + \frac{2 \sin(\pi\delta/c(\nu_2 - \nu_1)) \cos(\pi\delta/c(\nu_2 + \nu_1))}{2\pi\delta/c} \right\} \\ &= 2 \frac{I_0}{\Delta\nu} \left\{ \Delta\nu + \frac{\sin(\pi\delta\Delta\nu/c) \cos(2\pi\nu_0\delta/c)}{\pi\delta/c} \right\} \end{aligned}$$

où on a remplacé $(\nu_2 - \nu_1)$ par $\Delta\nu$ et $(\nu_2 + \nu_1)$ par $2\nu_0$ (ν_0 étant la fréquence centrale).
En introduisant la fonction «*sinus cardinal*», notée «*sinc*», définie par :

$$\text{sinc}(X) = \frac{\sin(X)}{X}$$

l'expression de l'intensité devient :

$$\begin{aligned} I(M) &= 2I_0 \left\{ 1 + \frac{\sin(\pi\delta\Delta\nu/c)}{\pi\delta\Delta\nu/c} \cdot \cos(2\pi\nu_0\delta/c) \right\} \\ &= 2I_0 \left\{ 1 + \text{sinc}(\pi\delta\Delta\nu/c) \cdot \cos(2\pi\nu_0\delta/c) \right\} \end{aligned}$$

On identifie le facteur de visibilité $V(\delta)$ de la figure d'interférences donné par :

$$V(\delta) = \text{sinc}(\pi\delta\Delta\nu/c)$$

on peut finalement écrire l'intensité résultante des interférences obtenues avec une source de lumière polychromatique à profil rectangulaire centré sur ν_0 et de largeur spectrale $\Delta\nu$:

$$I(M) = 2I_0 \left[1 + V(\delta) \cdot \cos(2\pi\nu_0\delta/c) \right] \quad (1.4)$$

III.2 Figure d'interférences

III.2.1 Contraste de la figure d'interférences

Les franges brillantes sont telles que l'ordre $p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_0} = \frac{\nu_0}{c}\delta(M) = n \in \mathbb{Z}$ (entier), soit alors :

$$I_{\max}(M) = 2I_0 [1 + |V(\delta)|]$$

Les franges sombres sont telles que l'ordre $p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_0} = \frac{\nu_0}{c}\delta(M) = m + \frac{1}{2}$ (demi-entier), soit alors :

$$I_{\min}(M) = 2I_0 [1 - |V(\delta)|]$$

ce qui donne un facteur de contraste $C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$ qui s'écrit :

$$C = |V(\delta)| = \left| \text{sinc}\left(\frac{\pi\Delta\nu}{c}\delta(M)\right) \right| \quad (1.5)$$

- Le contraste admet un maximum principal : $C = C_{max} = 1$ pour $\text{sinc}\left(\frac{\pi\Delta\nu}{c}\delta(M)\right) = 1 \iff \frac{\pi\Delta\nu}{c}\delta(M) = 0$, soit :

$$\delta(M) = 0$$

- Le contraste admet des minimas nuls : $C = C_{min} = 0$ pour $\sin\left(\frac{\pi\Delta\nu}{c}\delta(M)\right) = 0 \iff \frac{\pi\Delta\nu}{c}\delta(M) = n.\pi \quad (n \in \mathbb{Z}^*)$, soit :

$$\delta(M) = n \cdot \frac{c}{\Delta\nu}$$

- Le contraste admet des maximas secondaires : pour $\sin\left(\frac{\pi\Delta\nu}{c}\delta(M)\right) = \pm 1 \iff \frac{\pi\Delta\nu}{c}\delta(M) = (m + \frac{1}{2}).\pi \quad (m \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\})$, soit :

$$\delta(M) = (m + \frac{1}{2}) \cdot \frac{c}{\Delta\nu}$$

Il faut toutefois noter que les amplitudes de différents maximas est décroissante, en effet :

$$|\text{sinc}(0)| = 1 > \left|\text{sinc}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right| = \frac{1}{\frac{3\pi}{2}} > \left|\text{sinc}\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right| = \frac{1}{\frac{5\pi}{2}} > \left|\text{sinc}\left(\frac{7\pi}{2}\right)\right| = \frac{1}{\frac{7\pi}{2}} \dots \text{etc.}$$

D'où la courbe de contraste en fonction de la différence de marche $\delta(M)$ représentée sur la figure 1.8 ci-dessous :

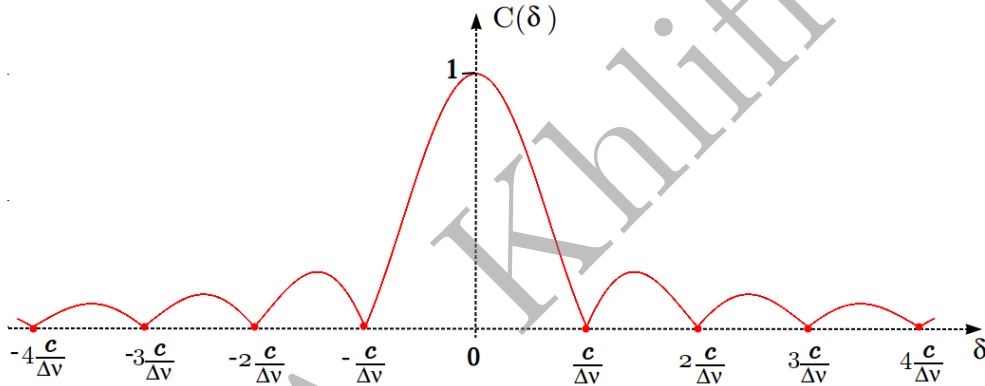


Figure 1.8: Courbe de contraste d'une figure d'interférences avec une source polychromatique

III.2.2 Courbe d'intensité

L'allure de la courbe d'intensité obtenue par interférences avec une source polychromatique à profil rectangulaire est représentée sur la figure 1.9 ci-bas :

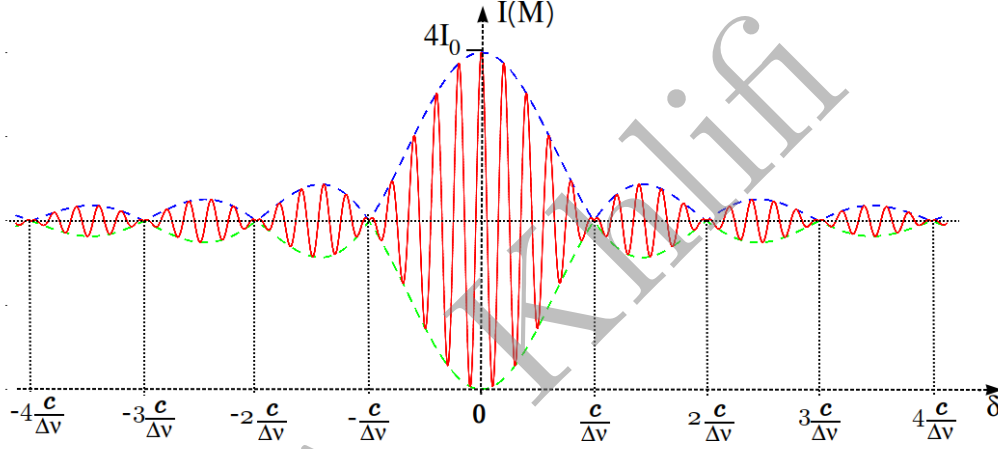


Figure 1.9: Courbe d'intensité d'une figure d'interférences avec une source polychromatique (en rouge). La courbe en traits bleus discontinus est relative aux maxima de lumière ($I_{max}(\delta)$), la courbe en traits verts discontinus est relative aux minima de lumière ($I_{min}(\delta)$).

III.3 Critère semi-quantitatif de brouillage des interférences

Considérons une source polychromatique de largeur $\Delta\nu$ émettant des radiations sur la plage de fréquences $[\nu_1, \nu_2]$ centrée sur ν_0 (figure 1.7). Désignons par $p_{\nu_2}(M)$ l'ordre au point M de l'espace associé à la raie de fréquence extrême ν_2 et par $p_{\nu_0}(M)$ l'ordre au même point M de l'espace associé à la raie de fréquence centrale ν_0 .

Le critère semi-quantitatif de brouillage des interférences stipule que :

Les interférences sont perdues au point M (i.e. brouillage et annulation de contraste) si la différence d'ordre $\Delta p(M) \big|_{1/2} = |p_{\nu_2}(M) - p_{\nu_0}(M)|$ associée à la demi-largeur (spectrale) de la source est supérieure à $1/2$:

$$\Delta p(M) \big|_{1/2} \geq \frac{1}{2} \quad (1.6)$$

III.4 Cohérence temporelle

Appliquons le critère semi-quantitatif de brouillage des interférences à la situation de la source polychromatique à profil rectangulaire de la figure 1.7. En un point M où la différence de marche vaut $\delta(M)$:

- L'ordre d'interférences associé à la raie de centrale de fréquence ν_0 s'écrit : $p_{\nu_0}(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_0} = \frac{\nu_0 \cdot \delta(M)}{c}$

- L'ordre d'interférences associé à la raie de extrême de fréquence ν_2 s'écrit : $p_{\nu_2}(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_2} = \frac{\nu_2 \cdot \delta(M)}{c}$

Il vient que : $\Delta p(M) \Big|_{1/2} = |p_{\nu_2}(M) - p_{\nu_0}(M)| = \left| \frac{\delta(M)}{c} (\nu_2 - \nu_0) \right| = \left| \frac{\delta(M)}{c} \cdot \frac{\Delta \nu}{2} \right|$.

D'après (1.6), les interférences sont brouillées au point M si :

$$\Delta p(M) \Big|_{1/2} = \frac{\Delta \nu}{2c} \delta(M) \geq \frac{1}{2}$$

soit :

$$\delta(M) \geq \frac{c}{\Delta \nu}$$

La valeur de $\delta(M)$ pour laquelle les interférences sont brouillées pour la première fois est appelée longueur de cohérence temporelle de la source polychromatique (de largeur spectrale $\Delta \nu$), et est notée L_c , soit :

$$L_c = \frac{c}{\Delta \nu} \quad (1.7)$$

De même, on peut associer à cette source un temps de cohérence temporelle qu'on note $\mathcal{T}_c$ telque :

$$\mathcal{T}_c = \frac{L_c}{c} = \frac{1}{\Delta \nu} \quad (1.8)$$

Remarques :

- Plus la largeur spectrale $\Delta \nu$ de la source augmente, plus L_c diminue, et plus la condition d'obtention du phénomène d'interférences ($\delta(M) < L_c$) devient difficile à remplir.
- Ce problème de cohérence temporelle ne se pose pas avec une source monochromatique. En effet, dans ce cas : $\Delta \nu \simeq 0 \implies L_c \rightarrow \infty$: les interférences ne se brouillent jamais et le contraste vaut toujours 1.

Interprétation physique de la cohérence temporelle :

Nous avons déjà vu en électromagnétisme que l'émission d'ondes par une source ne se fait pas de manière continue, mais plutôt sous forme de trains d'onde de longueur finie L (*i.e.* étendu spatial fini).

Ainsi, le phénomène d'interférences ne peut se produire que lorsque deux trains d'onde issus des sources secondaires S_1 et S_2 se croisent sur l'écran (figure 1.10).

Ceci ne peut avoir lieu que si la différence de marche $\delta(M)$ entre ces deux est inférieure à la longueur L de chacun, soit :

$$\delta(M) < L$$

La longueur de cohérence temporelle $L_c = \frac{c}{\Delta \nu}$ apparaît alors comme la longueur d'un train d'onde émis par la source polychromatique de largeur spectrale $\Delta \nu$.

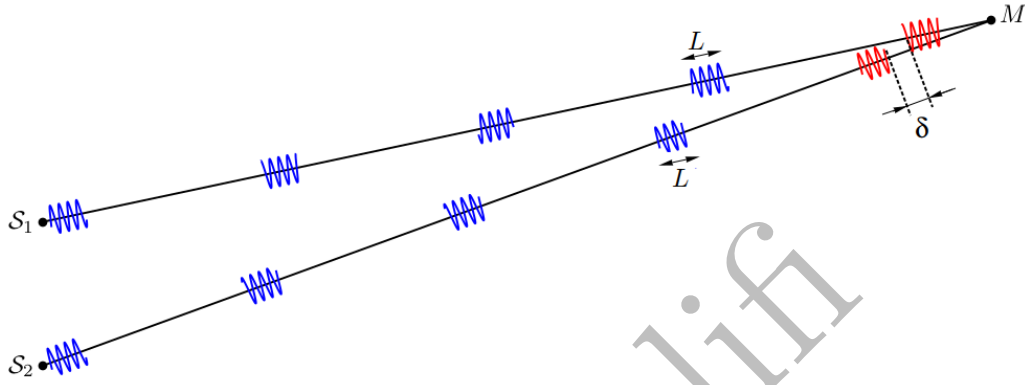


Figure 1.10: Illustration de la notion de cohérence temporelle : avec une source polychromatique, les interférences n'ont lieu que si $\delta(M) < L_c$ ($L_c \equiv L$: longueur d'un train d'onde).

IV Interférences avec une source large : cohérence spatiale

IV.1 Intensité résultante

Reprenons dans ce paragraphe la situation où la source primaire S est monochromatique de longueur d'onde λ et supposons que, cette fois, elle est géométriquement large de taille ℓ dans la direction $(X'X)$ parallèle à la droite (S_1S_2) .

On désire exprimer l'intensité obtenue sur l'écran suite à un phénomène d'interférences avec une telle source.

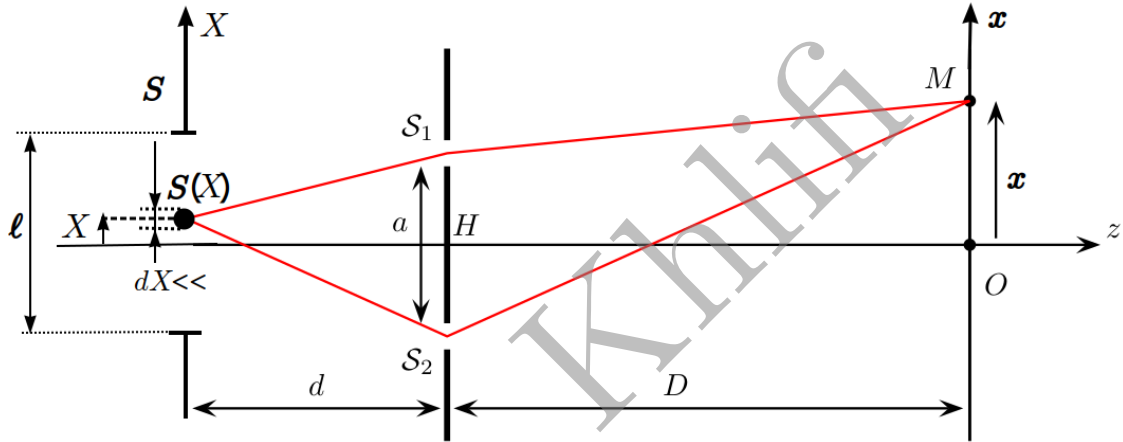


Figure 1.11: Interférences avec une source primaire géométriquement large de taille ℓ

D'une manière similaire à ce que nous avons fait dans le paragraphe précédent (avec une source spectralement large), commençons par exprimer l'intensité obtenue avec un élément $S(X)$ de cette source situé à l'abscisse X et de taille dX infiniment faible de sorte à l'assimiler

à une source ponctuelle (voir figure 1.11 ci-haut) :

$$\begin{aligned} dI(M) &= 2.dI_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta \right) \right) \\ &= 2 \frac{I_0}{\ell} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{ax}{D} + \frac{aX}{d} \right) \right) \right) dX \end{aligned}$$

où nous avons remplacé dI_0 par son expression $\frac{I_0}{\ell}.dX$ (dans le cas d'une émission uniforme de la source, ce que nous supposons ici) et la différence de marche en M , $\delta(M)$, par son expression $\left(\frac{ax}{D} + \frac{aX}{d} \right)$.

Comme deux points source différents $S(X_1)$ et $S(X_2)$ ne peuvent pas interférer entre eux (*i.e.* non éclairés par une même source), l'intensité totale observée sur l'écran n'est autre alors que la simple somme des intensités données par les différents points sources constituant S , soit :

$$\begin{aligned} I(M) &= \int_{X=-\ell/2}^{X=\ell/2} dI(M) = 2 \frac{I_0}{\ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{ax}{D} + \frac{aX}{d} \right) \right) \right) dX \\ &= 2 \frac{I_0}{\ell} \left\{ \ell + \left[\frac{\sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{ax}{D} + \frac{aX}{d} \right) \right)}{2\pi a / \lambda d} \right]_{X=-\ell/2}^{X=\ell/2} \right\} \\ &= 2 \frac{I_0}{\ell} \left\{ \ell + \frac{\sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{ax}{D} + \frac{a\ell}{2d} \right) \right) - \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{ax}{D} - \frac{a\ell}{2d} \right) \right)}{2\pi a / \lambda d} \right\} \end{aligned}$$

Encore une fois, moyennant la relation trigonométrique : $\sin a - \sin b = 2 \sin \left(\frac{a-b}{2} \right) \cos \left(\frac{a+b}{2} \right)$, il vient que :

$$\begin{aligned} I(M) &= 2 \frac{I_0}{\ell} \left[\ell + \frac{\sin(\pi a \ell / \lambda d)}{\pi a / \lambda d} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{D} \right) \right] \\ &= 2 I_0 \left[1 + \frac{\sin(\pi a \ell / \lambda d)}{\pi a \ell / \lambda d} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{D} \right) \right] \\ &= 2 I_0 \left[1 + \text{sinc}(\pi a \ell / \lambda d) \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{D} \right) \right] \end{aligned}$$

En introduisant le facteur de visibilité $V(\ell)$ dépendant de la taille ℓ de la source et s'écrivant : $V(\ell) = \text{sinc}(\pi a \ell / \lambda d)$, on obtient finalement l'expression suivante de l'intensité totale obtenue

sur l'écran par interférences avec une source géométriquement large de taille ℓ :

$$I(M) = 2I_0 \left[1 + V(\ell) \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{D} \right) \right] \quad (1.9)$$

IV.2 Contraste et cohérence spatiale

IV.2.1 Contraste de la figure d'interférences

Les franges brillantes sont d'intensité : $I_{max}(M) = 2I_0 [1 + |V(\ell)|]$, tandis que les franges sombres sont d'intensité $I_{min}(M) = 2I_0 [1 - |V(\ell)|]$. Il s'en suit que le facteur de contraste de la figure d'interférences dépend de la taille ℓ de la source primaire et s'écrit :

$$C = |V(\ell)| = \left| \text{sinc} \left(\frac{\pi a}{\lambda d} \ell \right) \right| \quad (1.10)$$

- La figure d'interférence est très bien nette pour un contraste maximal $C(\ell) = 1$, soit :

$$\frac{\pi a}{\lambda d} \ell = 0 \iff \ell = 0 \iff \text{source primaire ponctuelle}$$

- La figure d'interférence est totalement brouillée et les interférences sont perdues pour un contraste nul $C(\ell) = 0$, soit :

$$\frac{\pi a}{\lambda d} \ell = n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}_+^*) \iff \ell_n = n \frac{\lambda d}{a}$$

La courbe donnant les variations du facteur de contraste C en fonction de la taille ℓ de la source est donnée sur la figure 1.12 ci-dessous :

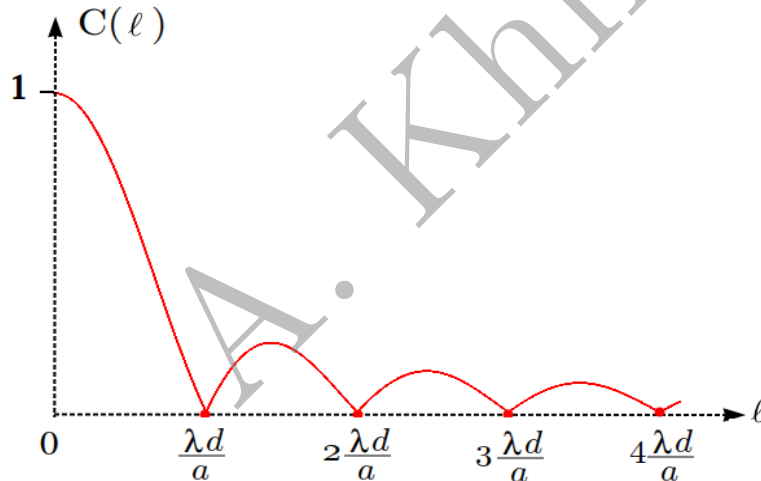


Figure 1.12: Variations du facteur de contraste C en fonction de la taille ℓ de la source primaire.

IV.2.2 Largeur de cohérence spatiale

Le critère *semi-quantitatif de brouillage des interférences* s'applique aussi dans la situation où la source primaire S est géométriquement large. Il stipule que :

En un point M de l'espace, les interférences sont perdues et la figure est brouillée si la différence d'ordre $\Delta p(M) \Big|_{1/2} = |p_{(\ell/2)}(M) - p_0(M)|$ associée à la demi-largeur (géométrique) de la source est supérieure à $1/2$:

$$\Delta p(M) \Big|_{1/2} \geq \frac{1}{2} \quad (1.11)$$

Dans le cas de la figure 1.11,

- L'ordre d'interférences en M dû à un point source placé à l'extrémité $\ell/2$ de la source primaire S s'écrit :

$$p_{(\ell/2)}(M) = \frac{\delta_{(\ell/2)}(M)}{\lambda} = \frac{a\ell/2}{\lambda d} + \frac{ax}{\lambda D}$$

- L'ordre d'interférences au même point M dû à un point source placé au centre de la source primaire S s'écrit :

$$p_0(M) = \frac{\delta_0(M)}{\lambda} = \frac{ax}{\lambda D}$$

Soit, la différence d'ordre en M associée à la demi-largeur géométrique de la source S s'écrit :

$$\Delta p(M) \Big|_{1/2} = \left(\frac{a\ell/2}{\lambda d} + \frac{ax}{\lambda D} \right) - \left(\frac{ax}{\lambda D} \right) = \frac{a\ell/2}{\lambda d}$$

Ainsi, l'application du critère semi-quantitatif de brouillage des interférences donne qu'en un point M on perd les interférences si :

$$\Delta p(M) \Big|_{1/2} = \frac{a\ell/2}{\lambda d} \geq \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\ell \geq \frac{\lambda d}{a}}$$

On introduit alors la largeur de cohérence spatiale ℓ_c de la source S :

$$\boxed{\ell_c = \frac{\lambda d}{a}} \quad (1.12)$$