

Interférences à N ondes

Introduction

I Propriétés des réseaux optiques

Un réseau optique est constitué d'un très grand nombre de motifs identiques (appelés aussi traits) régulièrement espacés. Il est caractérisé par le nombre total de fentes N , le pas a donnant la distance entre deux motifs successifs et le nombre de motifs par millimètre $n = 1/a$. On distingue deux types de réseaux : les réseaux par transmission pour lesquels les motifs sont des fentes, et les réseaux par réflexion pour lesquels les motifs sont des miroirs.

II Amplitude et intensité diffractées par un réseau

Un faisceau de rayons parallèles, monochromatiques de longueur d'onde λ , éclaire sous un angle d'incidence i un réseau optique de pas a constitué par N motifs identiques. On cherche à exprimer l'intensité totale diffractée par ce réseau en un point M de l'espace situé à très grande distance et repéré par l'angle de diffraction r .

II.1 différence de marche

On calcule la différence de marche $\delta(M)$ au point M entre deux ondes diffractées par deux motifs successifs de centres respectifs O_1 et O_2 tel que $O_1O_2 = a$. !

- Cas d'un réseau par transmission : (figure 1.1(a))

$$\begin{aligned}\delta(M) &= [SO_2M] - [SO_1M] = (SO_2 - SO_1) + (O_2M - O_1M) \\ &= O_2H_2 - O_1H_1 \\ &= a.\sin(i) - a.\sin(r)\end{aligned}$$

soit :

$$\boxed{\delta(M) = a(\sin(i) - \sin(r))} \quad (1.1)$$

- Cas d'un réseau par réflexion : (figure 1.1(b))

$$\begin{aligned}
 \delta(M) &= [SO_2M] - [SO_1M] = (SO_2 - SO_1) + (O_2M - O_1M) \\
 &= O_2H_2 + O_1H_1 \\
 &= a \cdot \sin(i) + a \cdot \sin(r)
 \end{aligned}$$

soit :

$$\delta(M) = a(\sin(i) + \sin(r)) \quad (1.2)$$

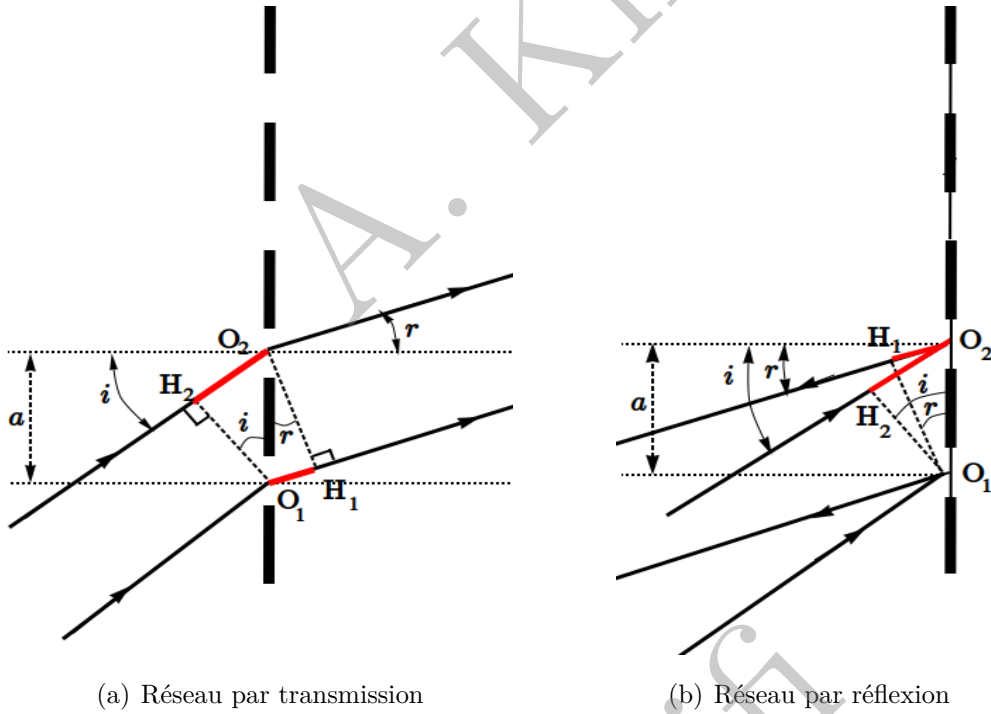


Figure 1.1: Différence de marche entre deux rayons diffractés par deux motifs voisins. i et r réfèrent respectivement à l'angle d'incidence et l'angle de diffraction.

II.2 Amplitude diffractée par le réseau

En désignant par $\underline{A}_1(M)$ l'amplitude complexe diffractée par la première fente (*i.e.* de centre O_1) au point M , situé à l'infini et repéré par l'angle de diffraction r , et en notant $\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda}\delta(M)$ le déphasage en ce point entre deux ondes diffractées par deux fentes successives séparées de a (qu'on notera par la suite φ tout court par souci d'alléger les notations), il s'en

suit que les amplitudes diffractées par les autres fentes du réseau s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned}
\text{Fente 2 : } & \underline{A}_2(M) = \underline{A}_1(M).e^{j\varphi} \\
\text{Fente 3 : } & \underline{A}_3(M) = \underline{A}_2(M).e^{j\varphi} = \underline{A}_1(M).e^{j2\varphi} \\
\text{Fente 4 : } & \underline{A}_4(M) = \underline{A}_3(M).e^{j\varphi} = \underline{A}_1(M).e^{j3\varphi} \\
& \vdots \\
\text{Fente (N-1) : } & \underline{A}_{N-1}(M) = \underline{A}_{N-2}(M).e^{j\varphi} = \underline{A}_1(M).e^{j(N-2)\varphi} \\
\text{Fente N : } & \underline{A}_N(M) = \underline{A}_{N-1}(M).e^{j\varphi} = \underline{A}_1(M).e^{j(N-1)\varphi}
\end{aligned}$$

Au point M , l'onde résultante est la superposition de toutes les ondes diffractées par ces différentes fentes, d'où l'amplitude totale suivante en M :

$$\begin{aligned}
\underline{A}(M) &= \sum_{p=1}^N \underline{A}_p(M) = \sum_{p=1}^N \underline{A}_1(M).e^{j(p-1)\varphi} \\
&= \underline{A}_1(M) \sum_{p=1}^N (e^{j\varphi})^{(p-1)} \\
&= \underline{A}_1(M) \sum_{p=0}^{N-1} (e^{j\varphi})^p \\
&= \underline{A}_1(M) \left[\frac{1 - e^{jN\varphi}}{1 - e^{j\varphi}} \right]
\end{aligned}$$

L'expression précédente peut se simplifier davantage comme suit :

$$\underline{A}(M) = \underline{A}_1(M) \frac{e^{j\frac{N\varphi}{2}} \left(e^{-j\frac{N\varphi}{2}} - e^{j\frac{N\varphi}{2}} \right)}{e^{j\frac{\varphi}{2}} \left(e^{-j\frac{\varphi}{2}} - e^{j\frac{\varphi}{2}} \right)} = \underline{A}_1(M) \cdot \left[\frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right] \cdot e^{j\frac{(N-1)\varphi}{2}}$$

soit enfin,

$$\underline{A}(M) = N \cdot \underline{A}_1(M) \cdot \left[\frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{N \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right] \cdot e^{j\frac{(N-1)\varphi}{2}} \quad (1.3)$$

II.3 Intensité diffractée par le réseau

Un réseau optique de pas a constitué de N motifs identiques supposés très fins, et éclairé par un faisceau parallèle de lumière monochromatique (de longueur d'onde λ) incident sous un angle d'incidence i , diffracte en tout point de l'espace, infiniment éloigné et repéré par son angle de

diffraction r , l'intensité lumineuse suivante :

$$I(M) = K \cdot \langle \underline{A}(M) \cdot \underline{A}^*(M) \rangle = KN^2 \langle \underline{A}_1(M) \cdot \underline{A}_1^*(M) \rangle \left[\frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{N \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right]^2$$

où K est une constante et $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta(M)$ désigne le déphasage en M entre deux ondes diffractées par deux motifs voisins du réseau.

En notant $I_0 = KN^2 \langle \underline{A}_1(M) \cdot \underline{A}_1^*(M) \rangle$ l'intensité lumineuse diffractée par une seule fente (*i.e* la première fente par exemple), il vient enfin que

$$I(M) = I_0 \cdot \left[\frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{N \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right]^2 \quad (1.4)$$

Courbe de $I(M)$:

La fonction $f(\varphi) = I(M)/I_0 = \left[\frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{N \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right]^2$ appelée fonction réseau admet :

- Des maxima principaux qui valent 1 pour :

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0 \iff \frac{\varphi}{2} = \kappa\pi \iff \boxed{\varphi = 2\kappa\pi} \quad (\kappa \in \mathbb{Z})$$

- Des maxima secondaires de très faible intensité pour :

$$\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right) = \pm 1 \iff \frac{N\varphi}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \iff \boxed{\varphi = \frac{(2n+1)\pi}{N}} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

- Des minimas nuls pour :

$$\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right) = 0 \iff \frac{N\varphi}{2} = m\pi \iff \boxed{\varphi = \frac{2m\pi}{N}} \quad (m \in \mathbb{Z} \text{ et } \frac{m}{N} \notin \mathbb{Z})$$

À la lumière de l'étude précédente, la courbe représentative de la fonction réseau $I(M)/I_0$ ainsi que l'aspect de l'écran d'observation sont donnés sur la figure 1.2 pour quatre valeurs différentes du nombre total de motifs N constituant le réseau. Il est nettement clair que, plus N est élevé, plus l'intensité des maxima secondaires devient faible, et par conséquent, ces derniers deviennent inaperçus.

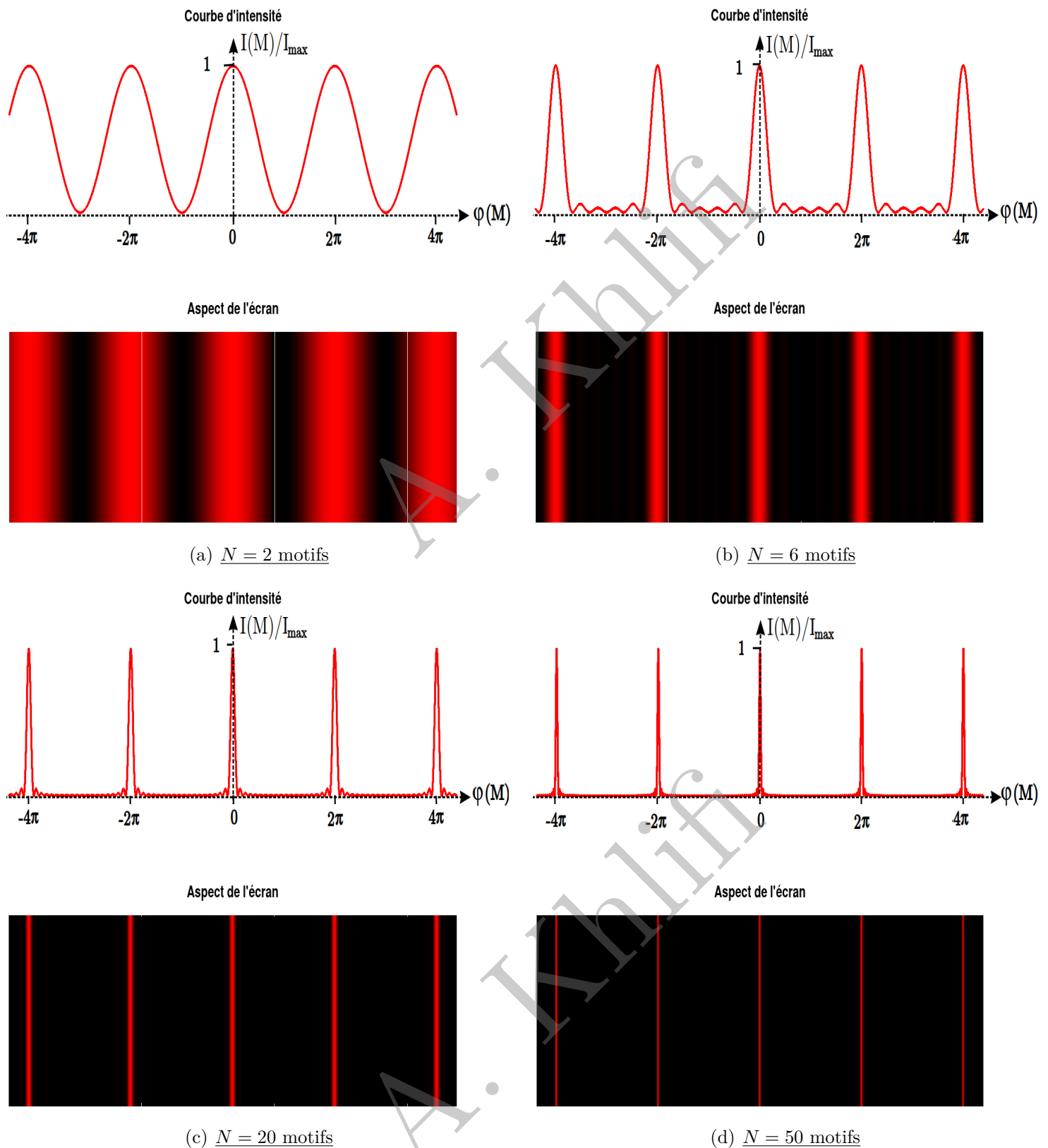


Figure 1.2: Courbes de la fonction réseau $I(M)/I_0$ et aspects de l'écran d'observation pour différentes valeurs du nombre total de motifs N .

II.4 Relation fondamentale des réseaux

La relation fondamentale des réseaux correspond à l'équation donnant les directions des maxima principaux d'intensité, soit :

$$\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda} \delta(M) = 2\kappa\pi \quad (\kappa \in \mathbb{Z})$$

- Pour un réseau par transmission : $\delta(M) = a(\sin(i) - \sin(r))$, soit alors

$$\sin(i) - \sin(r) = \kappa \cdot \frac{\lambda}{a} \quad (1.5)$$

Relation fondamentale d'un réseau par transmission

- Pour un réseau par réflexion : $\delta(M) = a(\sin(i) + \sin(r))$, soit alors

$$\sin(i) + \sin(r) = \kappa \cdot \frac{\lambda}{a} \quad (1.6)$$

Relation fondamentale d'un réseau par réflexion