

Transferts thermiques

Introduction

Lorsque deux corps sont à des températures différentes il se produit un transfert de chaleur du corps le plus chaud vers le corps le plus froid. On distingue trois modes de transfert thermique :

- *La conduction thermique* : échange de chaleur qui se produit sans déplacement de matière à l'exemple d'une cuillère qui s'échauffe une fois placée dans une casserole sur le feu.
- *La convection thermique* : qui a lieu dans les fluides et s'effectue avec déplacement de matière. On peut en distinguer deux types :
 - La convection *naturelle* où le déplacement du fluide se fait spontanément ; les parties chaudes se déplacent vers le haut tandis que les parties froides vers le bas (exemple : l'eau dans une casserole sur le feu).
 - La convection *forcée* où le déplacement du fluide est provoqué par un opérateur extérieur (une pompe ou un moteur par exemple).
- *Le rayonnement thermique* : qui est un échange de chaleur se produisant sans support matériel c'est-à-dire dans le vide. Un corps émet un rayonnement (visible ou invisible) dont la fréquence et l'intensité dépendent de la température du corps en question.

I Conduction thermique

I.1 Flux thermique et loi de Fourier

Considérons un solide homogène au sein duquel le transfert de chaleur ne peut avoir lieu que par conduction.

I.1.1 Cas d'un transfert unidirectionnel

Pour simplifier, on considère ici le cas où la température au sein du solide ne dépend que d'une seule variable, celle des x : $T(x)$ décroît si x augmente. L'échange thermique ne peut alors se faire que dans la direction de (Ox) .

La quantité de chaleur δQ qui traverse une surface élémentaire dS du solide pendant l'intervalle de temps dt est proportionnelle à dS et à dt . Soit :

$$\delta Q = j_{cd} \cdot dS \cdot dt$$

où j_{cd} (en $W.m^{-2}$) constitue un *vecteur densité de flux thermique par conduction*.

Fourrier a observé expérimentalement une relation de proportionnalité entre j_{cd} et la dérivée spatiale de la température, soit :

$$j_{cd} = -\lambda \frac{dT(x)}{dx}$$

avec : λ (en $W.m^{-1}.K^{-1}$) est appelée *conductivité thermique* du matériau.

I.1.2 Cas d'un transfert multidirectionnel : généralisation

Dans le cas général, quand la température au sein du solide varie dans les trois directions de l'espace, on définit alors de manière analogue :

$$j_{cdx} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad j_{cdy} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \quad j_{cdz} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$$

soit encore, le vecteur densité de flux thermique par conduction donné par la *loi de Fourier* suivante :

$$\vec{j}_{cd} = -\lambda \vec{\text{grad}} T \quad (1.1)$$

Le flux (ou aussi la puissance) thermique traversant une surface S du solide par conduction s'écrit donc :

$$P_{cd} \equiv \Phi_{cd} = \frac{\delta Q_{cd}}{dt} = \iint_S \vec{j}_{cd} \cdot \vec{dS} \quad (1.2)$$

Remarque : le signe «-» dans la loi de Fourier

On se propose de justifier le signe «-» qui figure dans la loi de Fourier. Pour cela, considérons un système isolé formé par deux corps à des températures T_1 et T_2 différentes.

Le second principe de la thermodynamique appliqué au système permet d'écrire :

$$\frac{\delta Q_1}{T_1} + \frac{\delta Q_2}{T_2} \geq 0$$

comme le système est isolé il s'en suit que : $\delta Q = \delta Q_1 + \delta Q_2 = 0 \rightarrow \delta Q_2 = -\delta Q_1$. En

remplaçant alors dans la relation précédente on aboutit à :

$$\delta Q_1 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \geq 0$$

Par conséquent,

- Si $T_2 > T_1 \rightarrow \delta Q_1 > 0$: le corps (1) reçoit de la chaleur du corps (2)
- Si $T_2 < T_1 \rightarrow \delta Q_1 < 0$: le corps (1) cède de la chaleur au corps (2)

Il s'en suit alors que le transfert thermique s'effectue toujours du corps le plus chaud vers le corps le plus froid, d'où le signe «-» dans la loi de Fourier.

I.2 Bilan d'énergie et équation de la chaleur

Considérons un matériau homogène de conductivité thermique λ et de capacité thermique massique c au sein duquel la température ne varie que dans une seule direction, celle des x .

On se propose d'effectuer un bilan d'énergie sur une portion élémentaire de ce matériau de géométrie cylindrique, de section S , de longueur dx , de masse volumique ρ et de masse $dm = \rho dV = \rho S dx$ (figure 1.1).

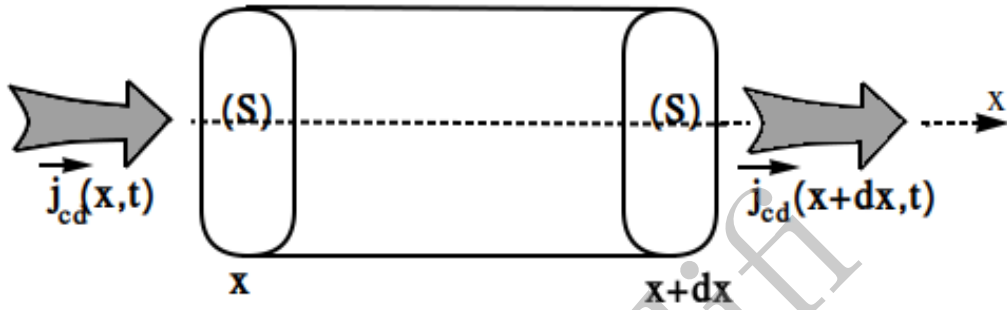


Figure 1.1

Pendant un intervalle de temps dt le cylindre échange de la chaleur à travers ses deux faces :

- En x : le flux thermique est entrant et la chaleur vaut

$$\delta Q_x = j_{cd}(x, t) S \cdot dt$$

- En $x + dx$: le flux thermique est sortant et la chaleur vaut

$$\delta Q_{x+dx} = -j_{cd}(x + dx, t) S \cdot dt$$

La chaleur échangée par le cylindre pendant dt vaut alors :

$$\begin{aligned}\delta Q &= \delta Q_x + \delta Q_{x+dx} = [j_{cd}(x, t) - j_{cd}(x + dx, t)] S dt \\ &= -\frac{j_{cd}(x, t)}{\partial x} dx \cdot S \cdot dt\end{aligned}$$

comme $\vec{j}_{cd}(x, t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T} = -\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \vec{e}_x$, en remplaçant dans l'équation précédente on obtient :

$$\delta Q = \lambda \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} dx \cdot S \cdot dt \quad (1.3)$$

D'un autre coté, cette chaleur peut s'écrire en fonction de la masse volumique du matériau ρ et de la capacité calorifique massique c comme suit :

$$\delta Q = dm \cdot c \cdot dT = \rho S dx \cdot c \cdot dT \quad (1.4)$$

les expressions (1.3) et (1.4) permettent enfin d'établir l'équation suivante appelée *équation de la chaleur* (ou encore *équation de diffusion thermique*) dans le cas du problème unidimensionnel étudié ici :

$$\boxed{\lambda \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t}} \quad (1.5)$$

Généralisation : Cas d'un transfert multidirectionnel

Dans le cas où l'échange de chaleur s'effectue dans les trois directions de l'espace, l'équation de la chaleur (1.5) se généralise comme suit :

$$\boxed{\lambda \Delta T(M, t) = \rho c \frac{\partial T(M, t)}{\partial t}} \quad (1.6)$$

Remarques :

- En introduisant la *diffusivité thermique* a du matériau définie par : $a = \frac{\lambda}{\rho c}$, l'équation de la chaleur (1.6) peut aussi s'écrire :

$$a \Delta T(M, t) = \frac{\partial T(x, t)}{\partial t}$$

- L'équation de la chaleur ne reste pas invariante par symétrie temporelle, c'est-à-dire en changeant «t» par «-t» ce qui traduit l'irréversibilité du phénomène de diffusion thermique.
- Dans le cas où une autre source de chaleur existe à l'intérieur du matériau (telque une réaction chimique endo ou exothermique, ou une source d'effet Joule, etc.) et qui libère une puissance thermique de densité volumique $p(x, t)$ pendant l'intervalle de temps dt , la chaleur $\delta Q_{ext} = p(x, t) dV dt = p(x, t) S dx \cdot dt$ qui lui est associée doit être prise en compte

de sorte que :

$$\delta Q = \delta Q_x + \delta Q_{x+dx} + \delta Q_{ext}$$

le bilan d'énergie développé plus haut aboutit dans ce cas à l'équation de la chaleur suivante :

$$\lambda \Delta T(M, t) + p(x, t) = \rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t}$$

I.3 Résolution de l'équation de la chaleur

On suppose dans cette partie que la conduction thermique s'effectue suivant la direction $(x'x)$, qu'il n'y a pas de sources extérieures de chaleur et que le régime est *stationnaire*.

L'équation de diffusion thermique (1.6) se réduit alors à :

$$\frac{d^2 T(x)}{dx^2} = 0$$

dont la solution s'écrit simplement :

$$T(x) = \alpha \cdot x + \beta$$

Pour un matériau de longueur L , si on suppose que $T(x = 0) = T_1$ et $T(x = L) = T_2$ il s'en suit que $\alpha = \frac{T_2 - T_1}{L}$ et $\beta = T_1$, d'où :

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$

et le vecteur densité de flux thermique par conduction n'est autre que :

$$\begin{aligned} \vec{j}_{cd}(x) &= -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T(x) = -\lambda \frac{dT(x)}{dx} \vec{e}_x \\ &= -\lambda \frac{(T_2 - T_1)}{L} \vec{e}_x \end{aligned}$$

Remarque :

On note bien qu'en régime stationnaire $\vec{j}_{cd}$ est à flux conservatif, en effet :

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{j}_{cd} &= \text{div} (-\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T) = \Delta(-\lambda T) \\ &= -\lambda \Delta T \\ &= 0 \end{aligned}$$

Il en résulte que la puissance thermique traversant une surface fermée du matériau est nulle :

$$\mathcal{P}_{cd} \equiv \Phi_{cd} = \oint_S \vec{j}_{cd} d\vec{S} = 0$$

I.4 Analogie avec la conduction de courant

La conduction de chaleur et la conduction de courant électrique présentent de très fortes analogies qu'on dresse dans le tableau 1.1 ci bas :

conduction thermique	conduction électrique
<i>Loi de Fourier :</i> $\vec{j}_{cd} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$	<i>Loi d'Ohm :</i> $\vec{j} = \gamma \vec{E} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}} V$
$\vec{j}_{cd}$	$\vec{j}$
λ	γ
T	V
<i>Flux thermique :</i> $\mathcal{P}_{cd} = \iint \vec{j}_{cd} d\vec{S}$	<i>Courant électrique :</i> $I = \iint \vec{j} d\vec{S}$

Table 1.1: Analogie entre la conduction de chaleur et la conduction de courant

Cette analogie permet notamment d'associer au matériau siège de la conduction de chaleur une *résistance thermique de conduction* R_{cd}^{th} analogue à la résistance électrique $R = \frac{U}{I} = \frac{\Delta V}{I}$ telque :

$$R_{cd}^{th} = \frac{\Delta T}{\mathcal{P}_{cd}} \quad (1.7)$$

Si on reprend l'exemple du cylindre de longueur L et de section S au sein duquel la température entre $T_1 = T(x=0)$ et $T_2 = T(x=L)$, la résistance thermique qui lui est associée s'écrit :

$$R_{cd}^{th} = \frac{\Delta T}{\mathcal{P}_{cd}} = \frac{T_1 - T_2}{\mathcal{P}_{cd}}$$

où : $\mathcal{P}_{cd} = j_{cd}S = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} S$. Il s'en suit le résultat final suivant :

La résistance thermique par conduction d'un matériau de conductivité thermique λ , de longueur L et de section S s'écrit :

$$R_{cd}^{th} = \frac{L}{\lambda S} \quad (1.8)$$

Remarque 1 :

Dans l'expression de R_{cd}^{th} on note toujours l'analogie avec l'expression de la résistance électrique R d'un conducteur de courant de conductivité électrique γ qui s'écrit :

$$R = \frac{L}{\gamma S}$$

Remarque 2 : Association de résistances thermiques

- Association en série :

$$R_{eq}^{th} = R_1^{th} + R_2^{th}$$

En effet, en régime stationnaire, le flux de chaleur $\mathcal{P}_{cd}$ traversant deux matériaux, de même section S et associés en série, de conductivités thermiques λ_1 et λ_2 est le même (figure 1.2) :

$$\mathcal{P}_{cd} = \frac{T_0 - T_1}{R_1^{th}} = \frac{T_1 - T_2}{R_2^{th}}$$

telque : $R_1^{th} = \frac{L_1}{\lambda_1 S}$ et $R_2^{th} = \frac{L_2}{\lambda_2 S}$

Il s'en suit que :

$$\begin{cases} T_0 - T_1 = R_1^{th} \cdot \mathcal{P}_{cd} \\ T_1 - T_2 = R_2^{th} \cdot \mathcal{P}_{cd} \end{cases}$$

D'où : $T_0 - T_2 = (R_1^{th} + R_2^{th}) \mathcal{P}_{cd} = R_{eq}^{th} \cdot \mathcal{P}_{cd}$

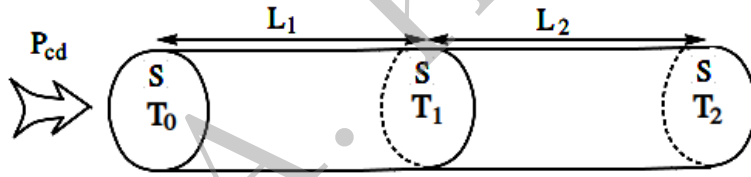


Figure 1.2: Association en série

- Association en parallèle :

$$\frac{1}{R_{eq}^{th}} = \frac{1}{R_1^{th}} + \frac{1}{R_2^{th}}$$

En effet, en régime stationnaire, le flux de chaleur $\mathcal{P}_{cd}$ traversant deux matériaux associés en parallèle, de sections S_1 et S_2 et de conductivités thermiques λ_1 et λ_2 , est la somme des flux traversant chaque matériau (figure 1.3) :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{cd} = \mathcal{P}_{cd1} + \mathcal{P}_{cd2} &= \frac{T_0 - T_1}{R_1^{th}} + \frac{T_0 - T_1}{R_2^{th}} \\ &= (T_0 - T_1) \cdot \left(\frac{1}{R_1^{th}} + \frac{1}{R_2^{th}} \right) \\ &= \frac{T_0 - T_1}{R_{eq}^{th}} \end{aligned}$$

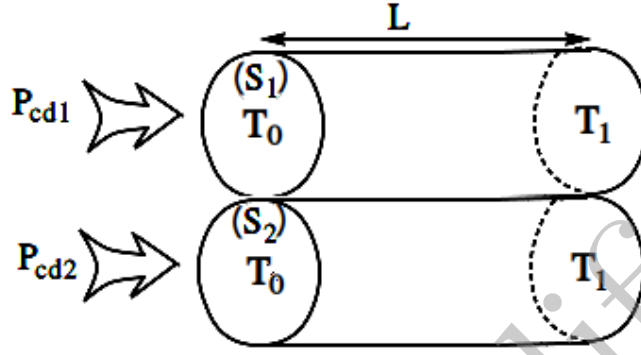


Figure 1.3: Association en parallèle

II Couplage conducto-convectif

II.1 Notion de couche limite

On considère un fluide de température T_f en mouvement au contact d'un solide de température T_s . Du fait de sa viscosité, la couche de fluide située juste au contact immédiat du solide devient solidaire à ce dernier et donc immobile. Cette couche d'épaisseur δ est appelée *couche limite*.

On s'intéresse aux transferts de chaleur qui ont lieu entre le solide et le fluide dans cette couche.

II.2 Loi de Newton

Dans le solide, le transfert est purement conductif, tandis que dans la couche limite solide/fluide le transfert est convectif (ou aussi *conducto-convectif*).

Pour décrire ce transfert, Newton a relié le vecteur densité de flux thermique par convection j_{cv} , dirigé du solide vers le fluide, aux températures T_s et T_f de ces derniers par la loi suivante appelée **loi de Newton** :

$$j_{cv} = h(T_s - T_f) \quad (1.9)$$

Où h (en $W.m^{-2}.K^{-1}$) est appelé *coefficient de conducto-convection*.

Application : Ailette de refroidissement

Une ailette de refroidissement est un dispositif thermique qui sert à accélérer le processus d'évacuation de la chaleur d'un corps chaud et ce, en augmentant sa surface de contact avec un fluide extérieur afin d'intensifier les échanges conducto-convectifs.

On veut ici étudier une ailette de refroidissement de géométrie cylindrique de rayon a . Son extrémité en $x = 0$ est en contact thermique avec le solide qu'on désire refroidir telque $T(x = 0) = T_0$ (figure 1.4). La longueur de l'ailette est L , le fluide environnant s'agit de l'air atmosphérique à la température T_a .

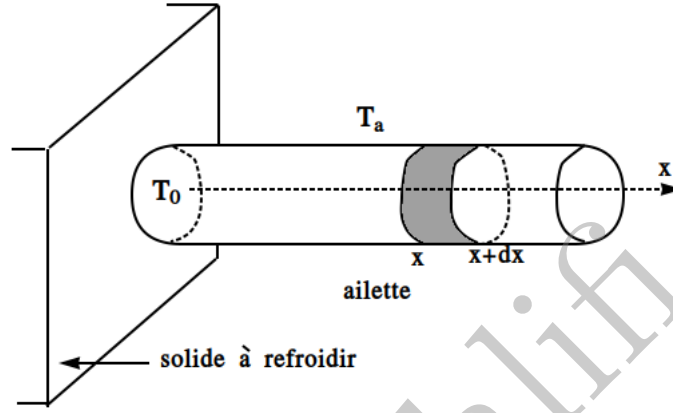


Figure 1.4: Ailette de refroidissement

La conductivité thermique de l'ailette est λ , sa chaleur massique est c et sa masse volumique vaut ρ .

Les transferts thermiques sont dus à :

- la conduction le long de l'ailette
- la conducto-convection essentiellement sur la paroi latérale de l'ailette

Un bilan d'énergie appliqué à un élément de l'ailette de section $S = \pi a^2$ et de longueur dx donne pendant dt :

$$\begin{aligned}\delta Q &= \delta Q_{cd} + \delta Q_{cv} \\ &= dm \cdot c \cdot dT \\ &= \rho \cdot \pi a^2 dx \cdot c \cdot dT\end{aligned}$$

où :

- δQ_{cd} désigne la quantité de chaleur échangée par conduction au sein de l'élément de l'ailette :

$$\delta Q_{cd} = \delta Q(x, t) + \delta Q(x + dx, t) = [j_{cd}(x, t) - j_{cd}(x + dx, t)] \pi a^2 dt$$

- δQ_{cv} est la quantité de chaleur évacuée par conducto-convection à travers la paroi latérale de l'élément de l'ailette de surface $dS_{lat} = 2\pi a dx$:

$$\begin{aligned}\delta Q_{cv} = -\mathcal{P}_{cv} \cdot dt &= -j_{cv} dS_{lat} \cdot dt \\ &= -h (T(x, t) - T_a) 2\pi a dx \cdot dt\end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation bilan on en déduit alors que :

$$-\frac{\partial j_{cd}(x, t)}{\partial x} - \frac{2h}{a} (T(x, t) - T_a) = \rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t}$$

comme $j_{cd}(x, t) = -\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}$ (loi de Fourier), il s'en suit que :

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} - \frac{2h}{\lambda a} (T(x, t) - T_a) = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t}$$

En régime stationnaire, l'équation précédente régissant les variations de la température à l'intérieur de l'ailette devient :

$$\boxed{\frac{d^2 T(x)}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda a} (T(x) - T_a) = 0}$$

En posant $\alpha = \sqrt{2h/\lambda a}$, la solution de cette équation différentielle prend la forme :

$$\boxed{T(x) = T_a + A.e^{\alpha x} + B.e^{-\alpha x}}$$

Les constantes A et B se déterminent grâce aux conditions au limites suivantes :

- Continuité de la température en $x = 0$: $T(x = 0) = T_0$
- Continuité du flux thermique en $x = L$: $j_{cd}(x = L^-) = j_{cv}(x = L^+)$
ce qui donne :

$$-\lambda \left. \frac{dT(x)}{dx} \right|_{x=L} = h [T(x = L) - T_a]$$