

MODULATIONS

1- PRINCIPE DE LA MODULATION

Plusieurs stations (émetteurs) veulent communiquer avec un auditeur (récepteur). Le signal modulant B.F., de fréquence f , contient l'information : $100 \text{ Hz} < f_{\text{voix}} < 7,5 \text{ kHz}$; $30 \text{ Hz} < f_{\text{orchestre}} < 20 \text{ kHz}$

La porteuse H.F., de fréquence F , transporte cette information. $100 \text{ kHz} < F_{\text{porteuse}} < 1 \text{ GHz}$ Elle peut être sinusoïdale ou numérique : PAM, PWM, PPM, PCM ou FSK. Le signal modulé (ou transmis) contient le signal modulant et la porteuse. Le récepteur sélectionne un émetteur (porteuse H.F. modulée par la B.F.), puis il le démodule pour ne garder que le signal modulant. La modulation permet ainsi de transmettre un grand nombre d'informations. Tout signal modulé peut s'écrire sous la forme :

$$s(t) = S(t) \cos[\theta(t)] = S(t) \cos[\Omega t + \varphi(t)]$$

où $S(t)$ est l'amplitude du signal modulé, $\theta(t)$ est la phase instantanée du signal modulé, $\theta = \Omega + \varphi$ est la pulsation. Deux cas se présentent :

- $S(t)$ est une fonction du temps et $\varphi(t)$ est une constante : c'est la modulation d'amplitude
- $S(t)$ est une constante et $\varphi(t)$ est une fonction du temps : c'est la modulation de fréquence ou de phase.

2- MODULATION D'AMPLITUDE

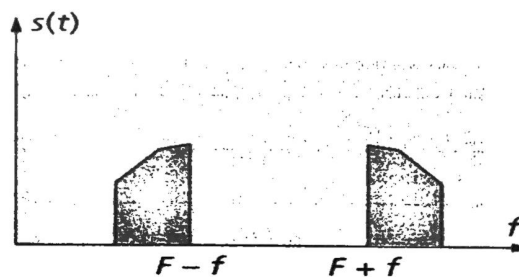
a- Modulation d'amplitude à porteuse supprimée

La tension associée à porteuse H.F. s'écrit : $v(t) = V_m \cos(\Omega t)$

Le signal modulant B.F. s'écrit : $u(t) = U_m \cos(\omega t)$ avec $\omega \ll \Omega$

La modulation s'effectue à l'aide d'un multiplieur analogique :

$$s(t) = k u(t) v(t) = k U_m V_m \cos(\Omega t) \cos(\omega t) = \frac{k U_m V_m}{2} [\cos(\Omega - \omega)t + \cos(\Omega + \omega)t]$$



Le spectre en fréquence est représenté ci-contre.

La démodulation est réalisée par multiplication du signal modulé $s(t)$ par la porteuse $v(t)$:

$$s(t) \cdot v(t) \propto [\cos(2\Omega - \omega)t + \cos\omega t]$$

Le premier terme est éliminé par un filtre passe-bas, le second est proportionnel au signal modulant $u(t)$ recherché. L'inconvénient de ce montage réside dans la nécessité de posséder la porteuse lors de la réception pour assurer la démodulation. Il a cependant l'avantage de ne consacrer la puissance fournie par l'émetteur qu'au signal utile.

b- Modulation d'amplitude avec porteuse

La tension associée à la porteuse H.F. s'écrit : $v(t) = V_m \cos(\Omega t)$

Le signal modulant B.F. : $u(t) = U_0 + U_m \cos(\omega t)$ avec $\omega \ll \Omega$ et où U_0 est une composante continue ajoutée.

La modulation dite « équilibrée » est obtenue à l'aide d'un multiplieur analogique :

$$s(t) = k u(t)v(t) = k(U_0 + U_m \cos(\omega t)) \cdot (V_m \cos(\Omega t))$$

$$s(t) = kU_0 \left(1 + \frac{U_m}{U_0} \cos(\omega t)\right) \cdot (V_m \cos(\Omega t)) = A(1 + m \cos(\omega t)) \cdot \cos(\Omega t)$$

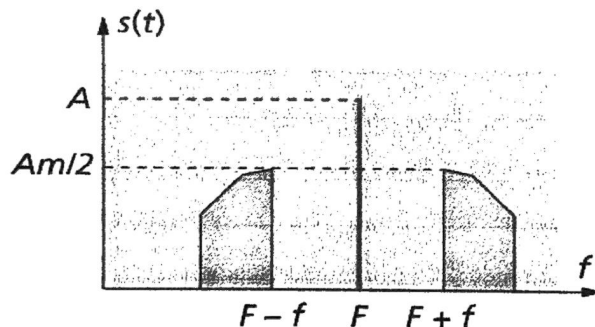
Avec : $A = k \cdot U_0 \cdot V_m$ et $m = U_m / U_0$: le taux de modulation.

L'amplitude du signal modulé est : $S(t) = A(1 + m \cos(\omega t))$

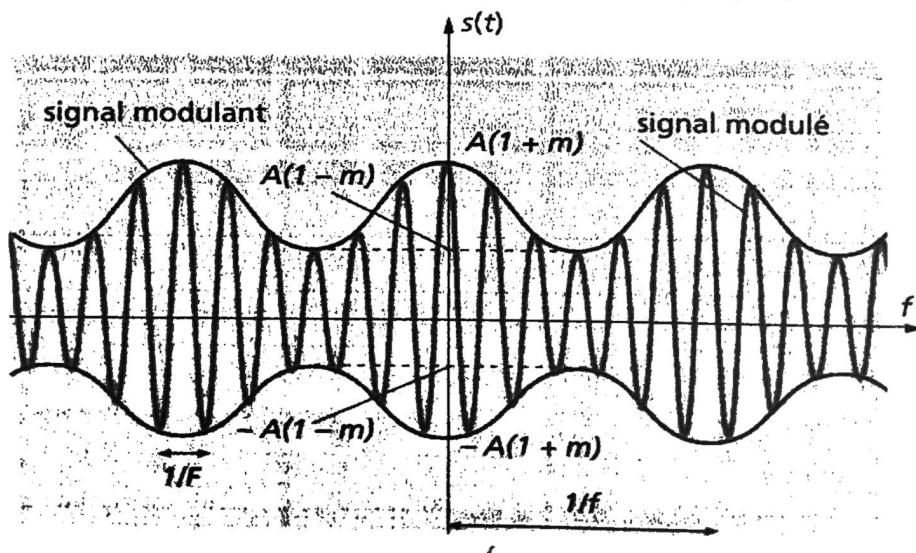
C'est bien une fonction du temps. $A(1 - m) \leq S(t) \leq A(1 + m)$

En développant $s(t)$, on obtient : $s(t) = A \cos \Omega t + \frac{mA}{2} \cos(\Omega - \omega) t + \frac{mA}{2} \cos(\Omega + \omega) t$

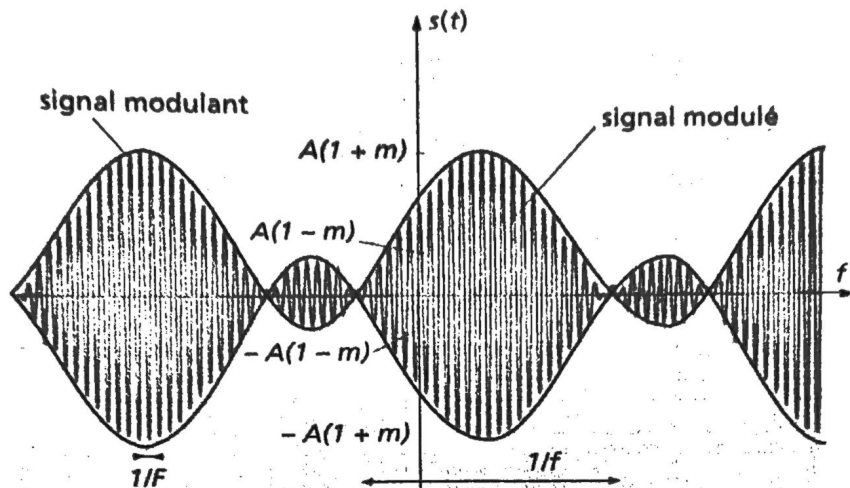
Le spectre en fréquence est représenté ci-contre.



Si $m < 1$, on obtient une modulation « positive »



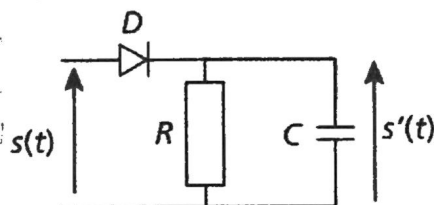
Si $m > 1$, on obtient une modulation « négative » :



L'inconvénient de ce type de modulation est que la puissance $P = \frac{(V_m U_m)^2}{2R} \left(1 + \frac{m^2}{2}\right)$ sert surtout à transmettre la porteuse. Son avantage est qu'il est inutile de disposer de la porteuse lors de la réception.

c- Démodulation à diode ou montage « détecteur de crête »

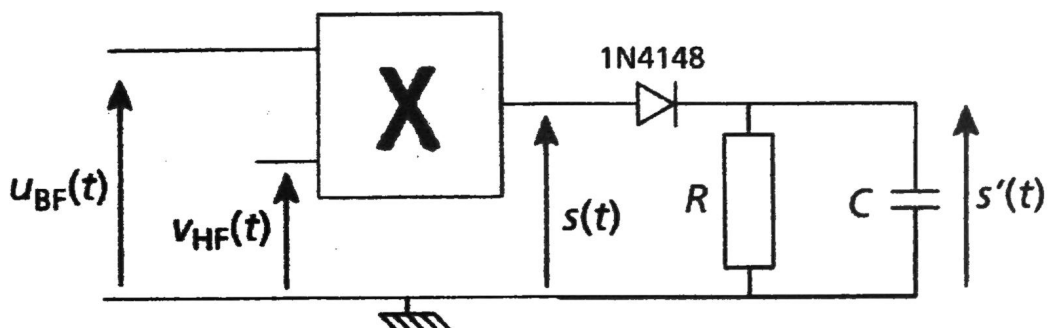
Ce type de démodulation n'est utilisable que pour la modulation positive avec porteuse ($m < 1$) :



Les conditions d'une bonne démodulation sont : $T(HF) \ll RC \ll T(BF)$

De plus la diode doit être une diode rapide : $t_{on} \text{ et } t_{off} \ll T(HF)$. En fin sa tension seuil V_s doit être telle que $V_s < A(1 - m)$.

Le montage complet de modulation-démodulation est ci-dessous :



d- Démodulation par détection synchrone

On multiplie $s(t)$ par la porteuse et on ajoute un filtre passe-bas. Cette méthode est idéale lorsque les signaux reçus sont faibles et elle fonctionne également dans le cas d'une modulation négative avec porteuse ou bien sans porteuse.

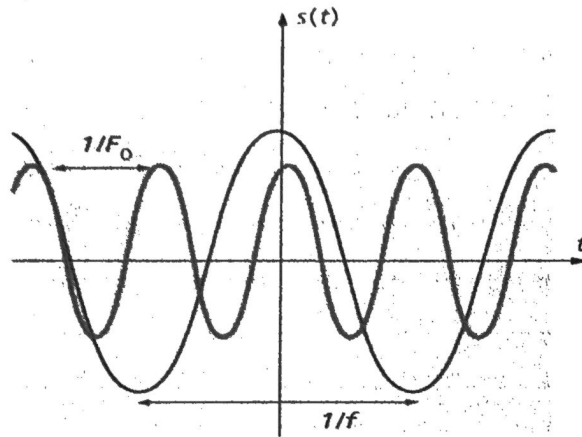
e- Démodulation BLU : On supprime une bande latérale par filtrage.

3- MODULATION DE FREQUENCE

Principe : Le signal modulant BF est : $s_m(t)$. La porteuse HF possède la pulsation Ω_0 . Le signal modulé s'écrit :

$$s(t) = A_0 \cos[\Omega_0 t + \varphi(t)] = A_0 \cos[\theta(t)]$$

La pulsation instantanée du signal modulé est définie par : $\Omega = \dot{\theta} = \Omega_0 + \dot{\varphi}$



Deux cas sont à envisager :

- $\varphi(t) = k s_m(t)$: $\varphi(t)$ est proportionnel au signal modulant BF : c'est la modulation de phase.
- $\varphi(t) = 2 \pi k \int_0^t s_m(t) dt$: c'est la modulation de fréquence, on en déduit :

$\Omega = \Omega_0 + 2 \pi k s_m(t)$, ce qui justifie le nom de cette modulation. Le signal modulé s'écrit alors :

$$s(t) = A_0 \cos \left[\Omega_0 t + 2 \pi k \int_0^t s_m(t) dt \right]$$

Si le signal modulant est sinusoïdal, $s_m(t) = A_m \cos(\omega t)$, le signal modulé s'écrit :

$$s(t) = A_0 \cos \left[\Omega_0 t + \frac{2 \pi k A_m}{\omega} \sin(\omega t) \right]$$

On définit :

- L'excursion crête de pulsation $\Delta\Omega = 2 \pi k A_m$ telle que : $\Omega_0 - \Delta\Omega < \Omega(t) < \Omega_0 + \Delta\Omega$.
- L'excursion crête de fréquence : $\Delta F = k A_m$ telle que : $F_0 - \Delta F < F(t) < F_0 + \Delta F$.

$$\Omega(t) = \Omega_0 + 2 \pi k A_m \cos(\omega t) = \Omega_0 + \Delta\Omega \cos(\omega t) : F(t) = F_0 + \Delta F \cos(\omega t)$$

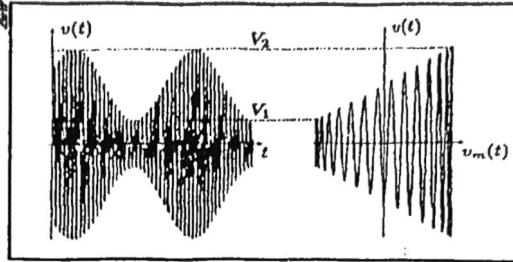
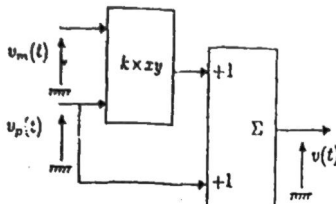
On appelle « indice de modulation » le coefficient $\beta = \frac{2 \pi k A_m}{\omega} = \frac{\Delta\Omega}{\omega} = \frac{\Delta F}{f}$, d'où : $\Delta F = \beta f$

Finalement : $s(t) = A_0 \cos[\Omega_0 t + \beta \sin(\omega t)]$

EXERCICE N° 5: Modulation d'amplitude

1. Un signal, que nous supposons d'abord sinusoïdal $v_m(t) = V_m \cos \omega_m t$, module la porteuse $v_p(t) = V_p \cos(\omega_p t)$, fournie par un oscillateur sinusoïdal de haute fréquence dont la fréquence d'oscillation $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi}$ ($f_p \gg f_m = \frac{\omega_m}{2\pi}$) est particulièrement stable. La modulation s'effectue à l'aide d'un circuit comprenant un multiplieur de constantes multiplicatives k et un additionneur.

a) Montrer que le signal modulé peut se mettre sous la forme : $v(t) = V_p(1 + m \cos(\omega_m t)) \cos(\omega_p t)$ où m est l'indice de modulation que l'on explicitera.

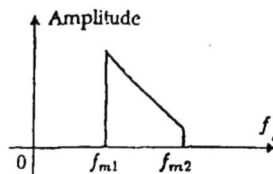


b) Afin de mesurer l'indice de modulation m du signal porteur, on réalise les deux oscillogrammes représentés ci-dessus.

Quels sont les modes de l'oscilloscope utilisés pour la réalisation de chacun ces oscillogrammes ? Exprimer l'indice de modulation en fonction des tensions $V_1 = 2V$, $V_2 = 18V$ et le calculer numériquement.

c) Déterminer le spectre de fréquences du signal modulé $v(t)$ et le représenter. En déduire, pour ce type de modulation, la largeur du spectre de fréquence nécessaire à la transmission d'un signal sinusoïdal de fréquence

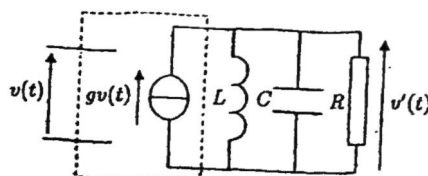
d) Plus généralement, le signal de modulation occupe une plage de fréquence $[f_{m1}, f_{m2}]$



Représenter le spectre de fréquences du signal modulé $v(t)$. En radiodiffusion $f_{m1} = 300 \text{ Hz}$ et $f_{m2} = 4,5 \text{ kHz}$, quelle est la largeur de la plage de fréquences occupée par le signal modulé ? Quel écart minimal de fréquence $\Delta f_{\min}$ doit-il exister entre les fréquences des porteuses de deux émetteurs pour que leurs émissions ne soient pas mutuellement brouillées ?

2. Amplification du signal

Le signal modulé doit être amplifié avant d'être appliqué à l'antenne émettrice. Pour cela, on intercale entre la sortie du modulateur délivrant le signal $v(t)$ et l'antenne, un amplificateur sélectif dont le circuit équivalent est donné ci-dessous. La transconductance (conductance) g de l'amplificateur est une constante réelle dans la bande de fréquences utilisée et le circuit (R, L, C) est accordé sur la fréquence f_p du signal porteur ($LC\omega_p^2 = 1$). Le facteur de qualité du circuit est $Q = \frac{R}{L\omega_p}$ où la résistance R représente l'antenne.



a) Calculer l'impédance complexe Z du circuit (R, L, C) et montrer que pour des pulsations ω telles que $\Delta\omega = \omega - \omega_p \ll \omega_p$, elle peut s'écrire $Z(j\omega) = \frac{R}{1 + 2jQ \frac{\Delta\omega}{\omega_p}}$. En déduire les expressions du

module $Z = |Z|$ de l'argument $\varphi = \arg(Z)$

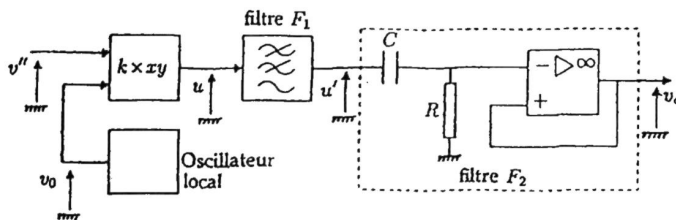
b) En déduire, que la tension $v'(t)$ à la sortie de l'amplificateur est de la forme $v'(t) = V_p' [1 + m' \cos(\omega_m t + \varphi')] \cos(\omega_p t)$, expression dans laquelle on explicitera V_p' , φ' et le nouvel indice de modulation m' . Commenter l'expression de $v'(t)$ obtenue.

c) À quelles conditions le signal amplifié $v'(t)$ est-il une image non déformée du signal modulé $v(t)$, lorsque la pulsation ω_m du signal de modulation varie entre ω_{m1} et ω_{m2} ? Vérifier que ces conditions sont réalisées lorsque $\frac{\omega_{m2}}{\omega_p} \ll \frac{1}{2Q}$.

3. Démodulation d'un signal modulé en amplitude,

L'antenne d'un récepteur radio capte un signal modulé en amplitude qui est appliqué à l'entrée d'un amplificateur à commande automatique de gain (CAG), c'est-à-dire que ce signal sera d'autant plus amplifié que son amplitude au niveau de l'antenne est plus faible. L'amplificateur délivre un signal de la forme $v''(t) = V_p''(1 + m \cos(\omega_m t)) \cos(\omega_p t)$ avec V_p'' constante par CAG.

Ce dernier signal est ensuite appliqué à l'entrée d'un démodulateur dont le rôle est de fournir un signal $v_d(t)$ image du signal de modulation $v_m(t) = V_m \cos(\omega_m t)$ (voir partie 1 et 2). Le démodulateur comprend un oscillateur local délivrant un signal $v_0(t) = V_0 \cos(\omega_p t)$, synchrone de la porteuse, un multiplieur de constante multiplicative k , un filtre passe-bas F_1 , idéal d'amplification $K_1 = 1$ pour $f \leq f_p$, et un filtre F_2 dont l'amplificateur opérationnel est idéal.



a) Déterminer la fonction de transfert $H_2(j\omega)$ du filtre F_2 . Quel est le type de ce filtre? Quelle est l'amplification K_2 de ce filtre en bande passante? Calculer R pour avoir une fréquence de coupure à $\frac{f_{m1}}{10}$ sachant que $C = 100 \text{ nF}$. Quel est le rôle de l'amplificateur opérationnel?

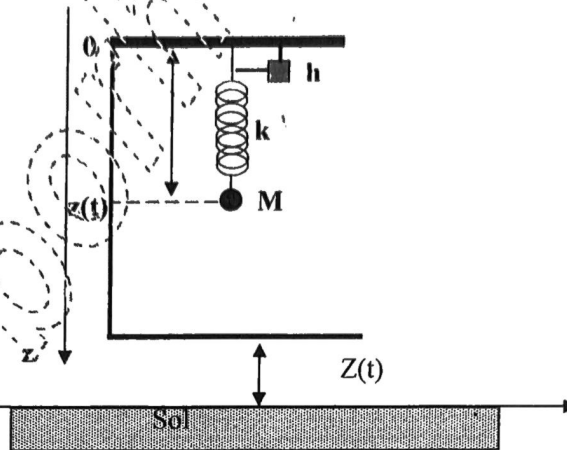
b) Représenter en le justifiant le spectre du signal $u(t)$ en sortie du multiplieur en indiquant l'amplitude des différentes composantes spectrales.

c) Établir l'expression du signal démodulé $v_d(t)$ à la sortie du filtre F_2 .

d) On isole à l'aide d'un soustracteur la composante continue U du signal $u(t)$ en utilisant les signaux délivrés par les filtres F_1 et F_2 . Exprimer U . Quel renseignement nous fournit cette composante continue et à quoi peut-on l'utiliser?

ETUDE D'UN SISMOGRAPHE

Un sismographe est typiquement constitué d'une masse M attachée à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . Le ressort est fixé à un bâti lié au sol un dispositif non représenté qui assure un amortissement sur la masse se traduisant par la force $f_r = -h \dot{v}$; où $\dot{v}$ est la vitesse de la masse dans le référentiel lié au bâti rigide. L'axe Oz est lié au sol (et au bâti).



- 1- Quelle est la longueur ℓ_0 du ressort, le référentiel lié au sol est supposé galiléen. Quelle est la longueur du ressort au repos en l'absence de secousse sismique..
- 2- Quand un séisme intervient, le sol subit un déplacement $Z(t)$ par rapport à un référentiel galiléen. Le référentiel lié au sol est il alors galiléen.
- 3- On pose : $u(t) = z(t) - \ell_0$; Montrer : $\ddot{u} + \frac{\sqrt{2}}{\tau} \dot{u} + \omega_0^2 u = \alpha \ddot{Z}$; On précisera la valeur et l'homogénéité de τ et ω_0 et α . on exploitera aussi leur interprétation physique.
- 4- On se place en régime sinusoïdal forcé. Normalement : $Z(t) = Z_0 \exp(j\omega t)$; donner l'expression de la fonction de transfert mécanique sous la forme suivante : $\underline{H}(j\omega) = \frac{u}{Z} = \frac{1}{-1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + j\sigma \frac{\omega_0}{\omega}}$ (cas $\omega_0 \tau = 1$).
- 5- Le diagramme de Bode est tracé en figure 2. Quel type de filtre a-t-on réalisé ? est ce bien cohérent avec la fonction de transfert calculée ?

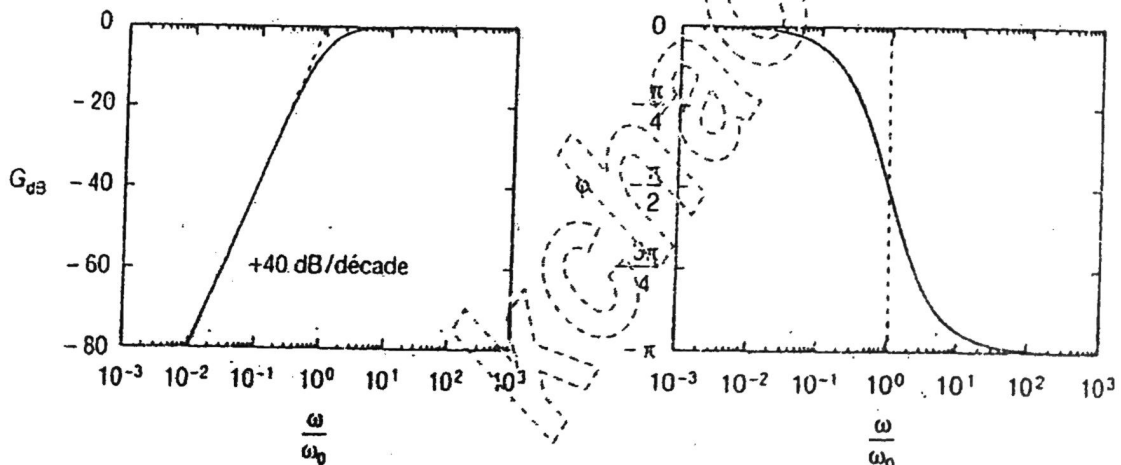


Figure 2

6- La pulsation propre du sismomètre étant $\omega_0 = 20 \text{ rad.s}^{-1}$, l'appareil détecte une onde sismique sous la forme de la fonction périodique $u(t)$. L'application d'un algorithme de transformée de Fourier fournit le spectre c_n tracé en figure 3. Quelle est la période de cette onde ?

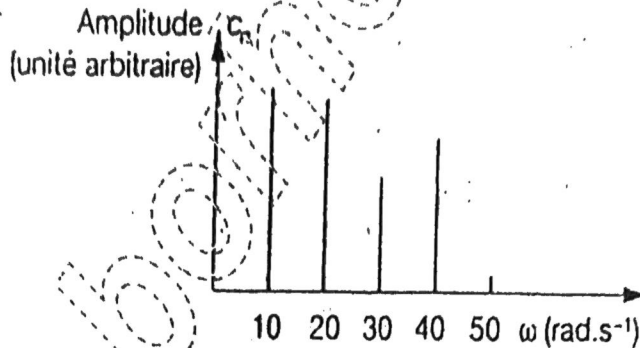


Figure 3

7- Montrer qu'il est possible d'obtenir l'excitation $Z(t)$ sous la forme : $Z(t) = \sum_{n>0} c_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$

et expliciter les c_n en fonction des c_n notamment.

8- En considérant l'allure du diagramme de Bode en amplitude pour $\omega_0 \tau > 1$ (Fig. 4), expliquer pourquoi le choix $\omega_0 \tau > 1$ doit absolument être évité.

9- Comment devrait-on modifier les caractéristiques du sismomètre afin que l'enregistrement de $u(t)$ permette de déduire directement $Z(t)$?

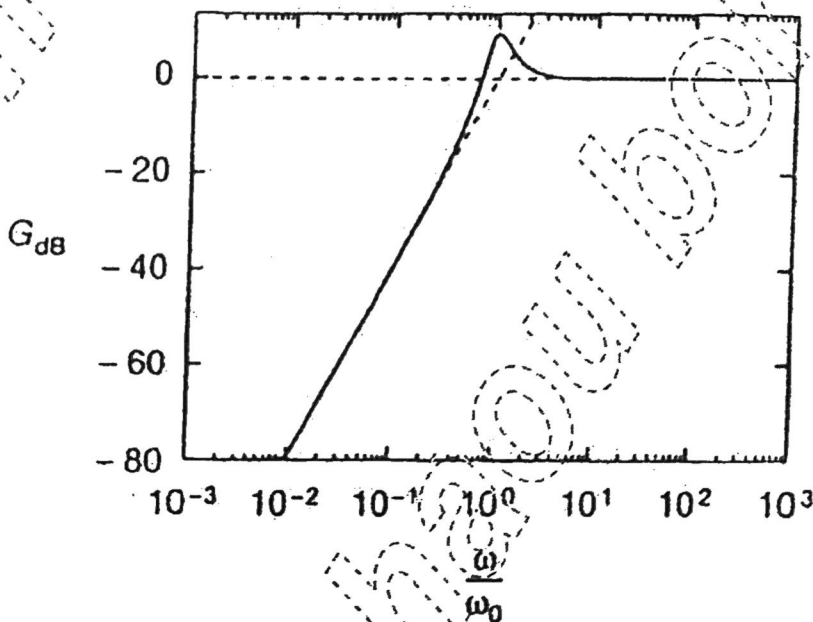


Figure 4