

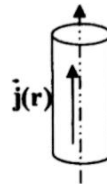
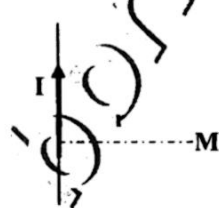
MAGNETOSTATIQUE

SERIE 1

Exercice 1 :

1. Un fil rectiligne illimité, de section négligeable et coïncidant avec l'axe Oz est parcouru par un courant continu d'intensité I :

- a- Déterminer par des considérations de symétrie la structure du vecteur champ magnétique $\vec{B}(M)$.
- b- En appliquons le théorème d'Ampère déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M)$ crée par le fil infini au point M à une distance, $r = OM$.



2. On considère un cylindre d'axes Oz, de rayon R, de longueur infinie, parcouru par un courant dont la densité volumique en un point M situé à la distance r de l'axe Oz vaut :

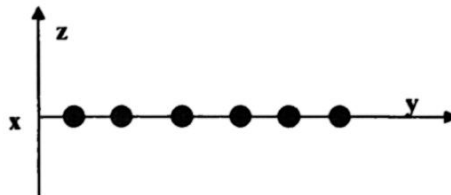
$$r < R \quad \vec{j} = j_0 \frac{r}{R} \vec{u}_z \quad r > R \quad \vec{j} = \vec{0}$$

Etudier le champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ en tout point de l'espace en utilisant les lois :

- a- Intégrées de la magnétostatique (Théorème d'Ampère).
- b- Locales de la magnétostatique (Maxwell-Ampère).

Exercice 2:

On considère une nappe, plane, infinie, de courants surfaciques, contenue dans le plan (x O y) avec une densité surfacique de courant uniforme $\vec{j}_s = + j_s \vec{u}_x$.

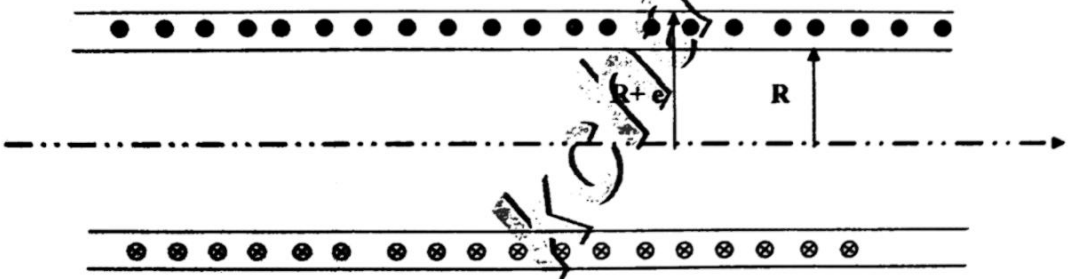


- 1- Déterminer par des considérations de symétrie la structure du vecteur champ magnétique $\vec{B}(M)$. Quelle relation relie $\vec{B}(z)$ à $\vec{B}(-z)$.
- 2- Déterminer $\vec{B}(M)$ en tout point de l'espace ($z > 0$; $z < 0$).
- 3- Etudier la continuité de $\vec{B}(M)$ à la traversée de la nappe.

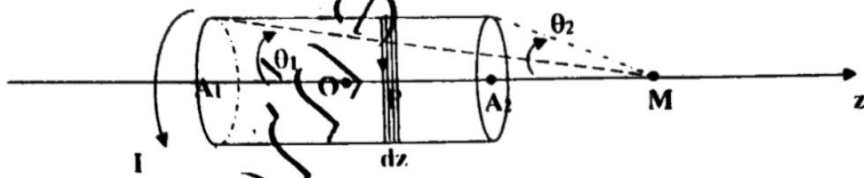
Exercice 3:

L'espace étant à un repère cylindrique, on considère la distribution volumique de courant suivante :

$$r < R \quad \vec{j} = \vec{0}; \quad r \in [R, R+e] \quad \vec{j} = j_0 \vec{u}_\theta; \quad r > R+e \quad \vec{j} = \vec{0}$$



3. Un solénoïde fini d'axe Oz est constitué d'un bobinage serré de n spires circulaires par unité de longueur. Les spires ont un rayon R et sont parcourues par un courant d'intensité I . On considère une épaisseur de spires dz au point P de côté z et un point M sur l'axe, extérieur au solénoïde, à partir duquel les extrémités du solénoïde sont vues sous des angles θ_1 et θ_2 .

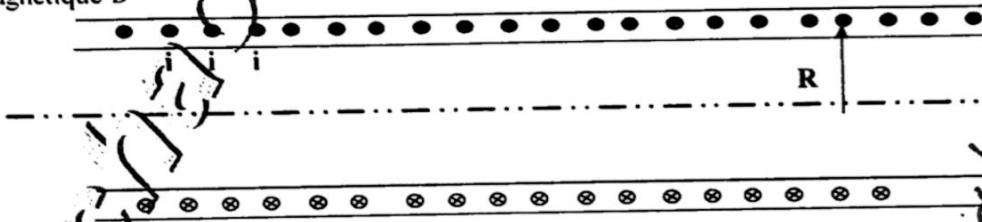


a- Déterminer l'expression du champ magnétique élémentaire créé en M de l'axe :

$$d\vec{B}(M) = n \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta \, dz \, \vec{u}_z$$

b- Déduire l'expression du champ magnétique totale $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \vec{u}_z$

4. Soit un solénoïde de longueur infinie, en appliquant le théorème d'Ampère sur des contours bien choisis, déterminer le champ magnétique pour $r < R$, on donne ($r > R$; $\vec{B} = \vec{0}$). Vérifier la discontinuité du champ magnétique $\vec{B}$



5. Soit $\vec{j}_s = j_s \cos \alpha \vec{u}_\theta + j_s \sin \alpha \vec{u}_z$ une distribution hélicoïdale de courant surfacique d'un solénoïde de longueur infinie de rayon R ; $j_s = n I$. Déterminer l'expression du champ $\vec{B}$ en tout point de l'espace.

Exercice 5 : effet de pincement dans un plasma

Une colonne cylindrique (d'axe Oz) de plasma neutre (gaz ionisé) de rayon a , transporte un courant électrique d'intensité I , réparti avec une densité de courant uniforme J parallèle à Oz ; on néglige le poids des ions devant les forces électromagnétique mises en jeu.

AN : $I = 2 \cdot 10^6 \text{ A}$; $a = 8 \text{ cm}$; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ SI}$, $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$.

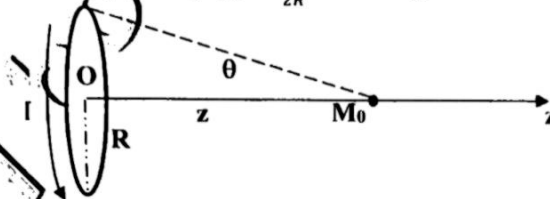
- 1- Etablir la loi $p(r)$ des pressions en tout point du gaz ionisé (entouré de vide) à la distance r ($r < a$) de l'axe Oz. Calculer la pression maximale dans le plasma. Loi hydrostatique : $\vec{\text{grad}} p(r) = \vec{f}_{\text{vol}}$
- 2- Montrer que la force pressante F exercée par le plasma sur un disque métallique, de rayon $R > a$ et normal à l'axe Oz, ne dépend que de l'intensité I du courant. Calculer F .
- 3- Le plasma est à haute température $T = 3 \cdot 10^7 \text{ K}$, et on admet que ses particules se comportent comme un gaz parfait. Déterminer :

- a- La densité particulaire sur l'axe de la colonne de plasma.
- b- Le nombre de particules contenues dans le plasma, sur une hauteur de 1 m.

- 1- Justifier que le champ magnétique $\vec{B}$ est nul pour $r > R + c$.
- 2- Etudier le champ $\vec{B}$, en tout point de l'espace en utilisant :
 - a- Les équations locales de la magnétostatique (Maxwell Ampère).
 - b- Les lois intégrées de la magnétostatique (Théorème d'Ampère).

Exercice 4 :

1. Une spire circulaire de centre O, d'axe Oz et de rayon R est parcourue par un courant continu d'intensité I. A partir d'un point M_0 de son axe elle est vue sous un angle au sommet θ . Le champ magnétique de la spire est donnée par : $\vec{B}(M_0) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta \vec{u}_z$,

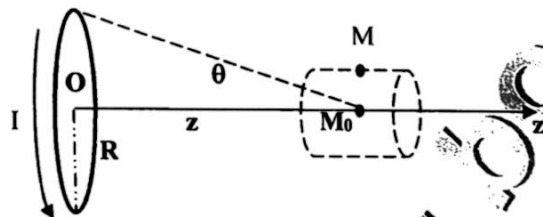


- On écrira l'expression de $B_0(z)$, sous la forme suivante : $B_0(z) = B\left(\frac{z}{R}\right)_{max}$, Préciser les expressions de

B_{max} et $f\left(\frac{z}{R}\right)$

- Tracer l'allure de la courbe $B_0(z)$ correspondante en fonction de z , préciser les positions des deux points d'inflexions.

2. Un point M voisin de M_0 se trouve à la même abscisse z mais à une distance r de l'axe ($r \ll R$). On considère en première approximation que la composante du champ en M selon l'axe Oz est égale au champ en M_0 , soit $B_z(r=0, z) = B_z(r, z) = B_0(z)$. On cherche à calculer le flux du champ magnétique sortant de la surface (S) fermée délimitée par le cylindre de rayon r ($r \ll R$) compris entre les tranches d'abscisses z



et $z + dz$ comme indiqué sur le schéma suivant :

- a- Que peut-on dire du flux de $\vec{B}$ à travers une surface (S) fermée ?
- b- En déduire que la composante radiale du champ magnétique en M s'écrit :

$$B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_0(z)}{dz} = \frac{3}{4} \frac{\mu_0 I R^2 z r}{(R^2 + z^2)^{5/2}}$$

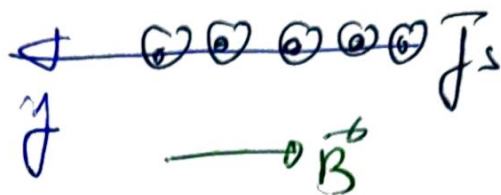
c- Application : une particule de charge q et de masse m , en mouvement rectiligne parallèle à Oz, pénètre dans le champ magnétique de la bobine plate. Ecrire en coordonnées cylindrique (r, θ, z) les équations du mouvement (on ne fera intervenir que la composante axiale B_z)

En déduire les équations différentielles : $\ddot{r} + \left(\frac{q^2 B_z^2}{4m^2}\right) r = 0$; $\ddot{z} + \left(\frac{q^2}{2m}\right) r B_r B_z = 0$

$$\vec{B}_{fil} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$



$$\vec{B}_{plm} = \pm \frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{e}_y$$



$$\vec{B}_{solénoïde infini} = +\mu_0 j_s \vec{e}_z = \mu_0 n i \vec{e}_z$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 n i}{2} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \vec{e}_z$$

$$\vec{B}_{spire} = \left(\frac{\mu_0 i n^3 \theta}{2R} \right) \vec{e}_z$$

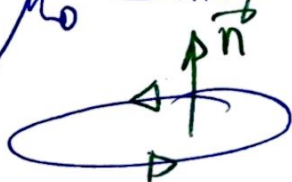
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 [\vec{I} d\vec{l}] \wedge (\vec{r})}{4\pi(r)^3} : \text{pseudo-vecteur}$$

$$\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlace}$$

de préférence
sens (i)

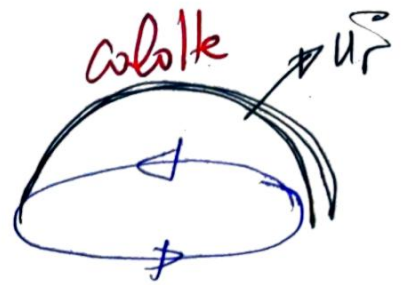
$\vec{B}_\theta$



$\vec{B}_x, \vec{B}_y, \vec{B}_z \longrightarrow$

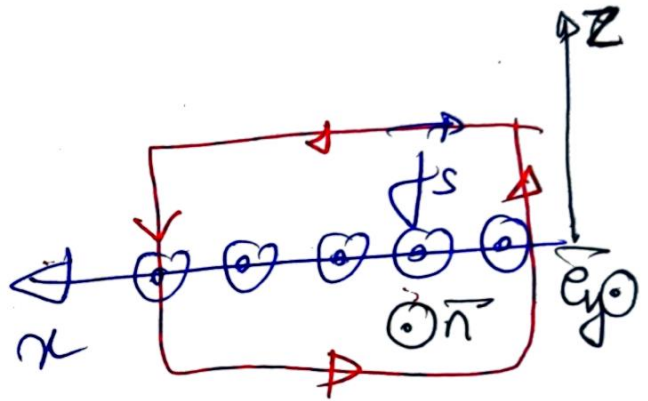


$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S} = \frac{dq}{dt}$$



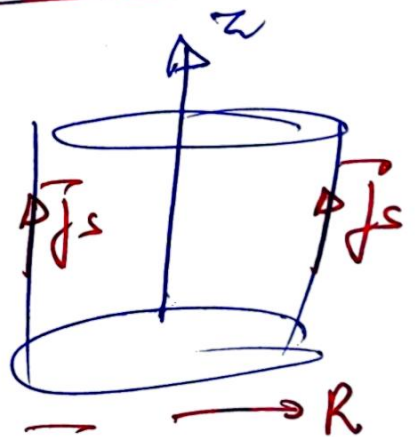
$$I = \int \vec{J}_s \cdot \underbrace{d\vec{l} \vec{n}}_{\neq d\vec{l}}$$

$$I = \int j_s \vec{e}_y \cdot \underbrace{dx \cdot \vec{e}_y}_{\neq dx}$$

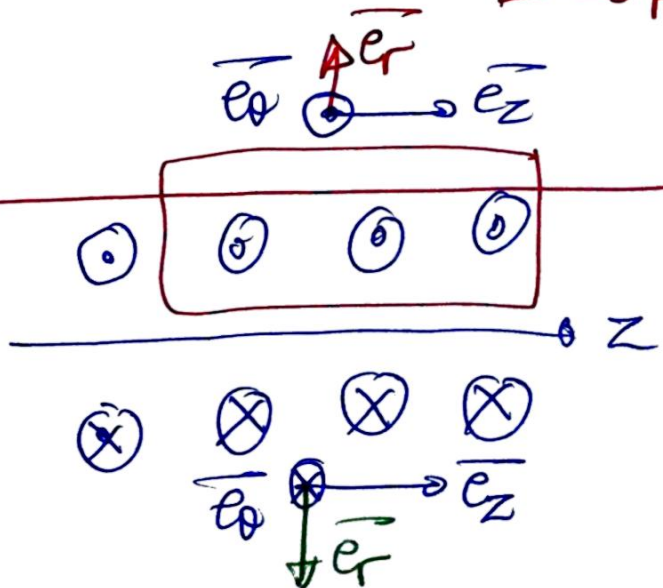
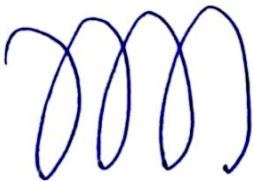


$$I = \int \vec{j}_s \cdot d\vec{l} \cdot \vec{n}$$

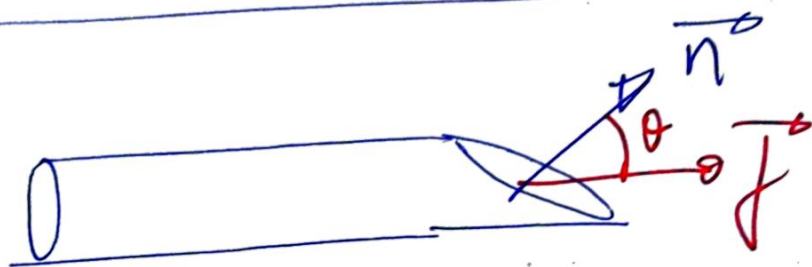
$$= \int j_s \vec{e}_z \cdot R d\theta \cdot \vec{e}_z$$



$$I = 2\pi R j_s$$



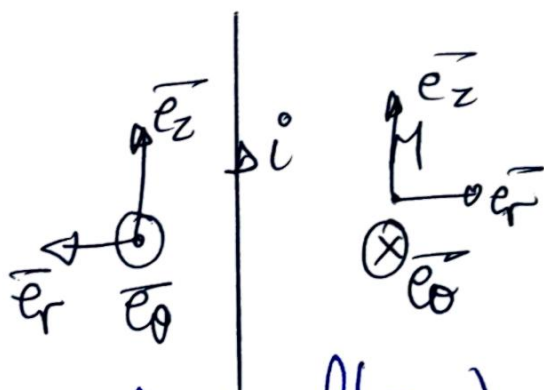
$$I = \int \vec{j}_s \cdot d\vec{l} \cdot \vec{n} = \int j_s \vec{e}_\theta \cdot dz \cdot \vec{e}_\theta = j_s l$$



Ex1
(M, U_r, U_z) PSL
pour le courant $\Rightarrow$
 $\vec{B} \perp$ à ce plan

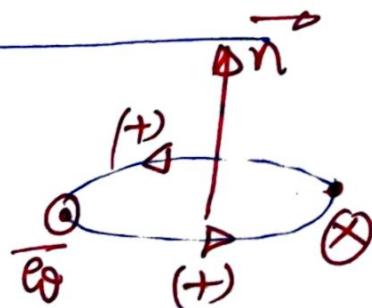
$\vec{B}_\theta(r, \theta, z)$;
composante

donc rotation + translation (oz)
 $\vec{B}_\theta(r)$



$$\oint \vec{B}_\theta d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B_\theta(r) \cdot r d\theta$$

$$= 2\pi r B_\theta(r)$$



$I_{enleu} = +i$; $\vec{B}_{eff} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{e}_\theta$

$\mu_0 = \text{perméabilité du vide: } H.m^{-1}$

ϵ_0 : permittivité du vide $F \cdot m^{-1}$

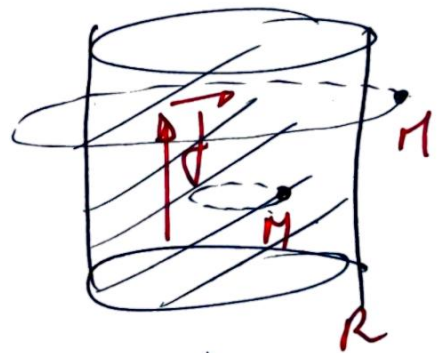
$$C_{\text{phen}} = \frac{\epsilon_0 S}{e_{\text{m}}} \quad \text{---} \quad \left| \begin{array}{c} e \\ S \end{array} \right|$$

permittivité relative: $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$

$$C = \left(\frac{\epsilon_0 S}{e} \right) \times \epsilon_r, \quad \sqrt{\epsilon_r} = n$$

$$\vec{j}(r) = j_0 \frac{r}{R} \vec{e}_z$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B_\theta(r)$$



$$I_{\text{encad}} = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint j(r) \cdot (r dr d\theta)$$

$$= 2\pi \int_0^R r j(r) dr$$

1^{er} cas: $r \leq R$

$$I_{\text{encad}} = 2\pi \int_0^r r' \left(j_0 \frac{r'}{R} \right) dr'$$

$$I_{enl} = \frac{2\pi j_0}{R} \frac{r^3}{3}$$

• 2^{nd} $r \geq R$ $I_{en} = 2\pi \int_0^R \frac{r^2 j_0}{R} dr + 2\pi \int_R^r r \times 0 dr$

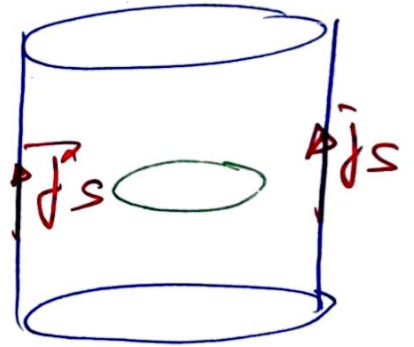
$$= \frac{2\pi j_0}{R} \frac{R^3}{3}$$

B_g

$$I_{enl} = 0$$

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = 2\pi r B_\phi(r) = 0$$

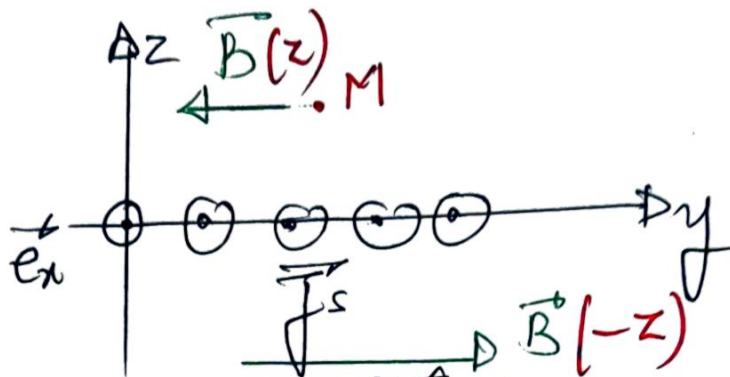
$$\vec{B}^0(r < R) = \vec{0}$$



• $r > R$ $I_{enl} = 2\pi R j_s$

$$\vec{B}^0(r > R) = \frac{\mu_0 j_s R}{r} \vec{e}_\phi$$

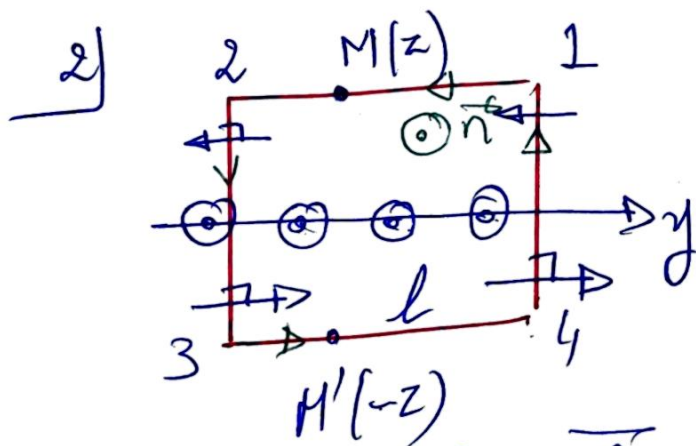
Ex 2



1) $(M \vec{u}_x \vec{u}_z)$ P.S.P $\Rightarrow \vec{B} \perp$

$\vec{B}_y(z)$ onde transverse (oy) (on)

$B(-z) = -B(z)$ (noy) P.S.P pour la case $\Rightarrow$ l'effet $\vec{B}$ est impaire



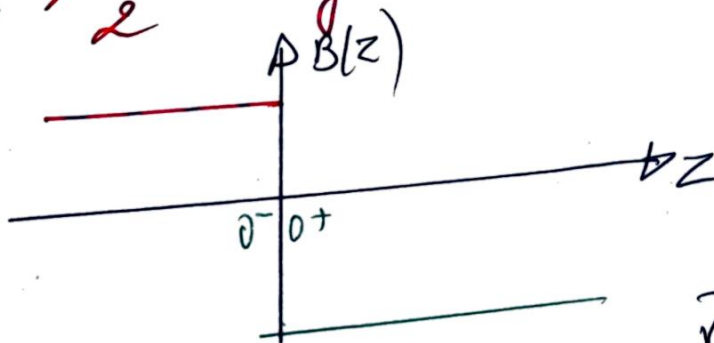
$I_{enl} = j_s l$

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_3^4 \vec{B} \cdot d\vec{l}$

$= B(z)(-l) + B(-z)l = -2B(z)l$

- " B(z)

$$\vec{B}_{phn} = \begin{cases} -\frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{e}_y & z > 0 \\ +\frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{e}_y & z < 0 \end{cases}$$



$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$$

(1): $z < 0$ $\vec{n}_{12} = +\vec{e}_z$

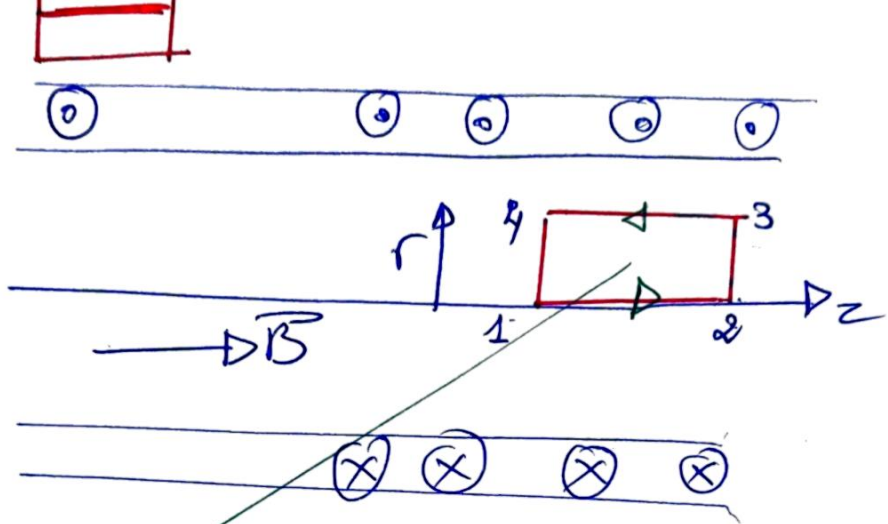
(2): $z > 0$

$$\vec{B}(z > 0) - \vec{B}(z < 0) = \mu_0 j_s (\vec{e}_n \wedge \vec{e}_z)$$

$$2\vec{B}(z > 0) = \mu_0 j_s (-\vec{e}_y)$$

Ex 3 $\vec{j} = j_0 \vec{e}_\varphi$; $r \in [R; R+e]$

1) Mq: $B_{ext} = 0$



$I_{\text{enclosed}} = 0$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B_{\text{int}}(0) l - B_{34}(0) l = 0$$

$$\Rightarrow B_{\text{int}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m}{r^3}$$

de m $B_{\text{ext}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m}{r^3}$

$r \rightarrow \infty$ un dipôle magnétique

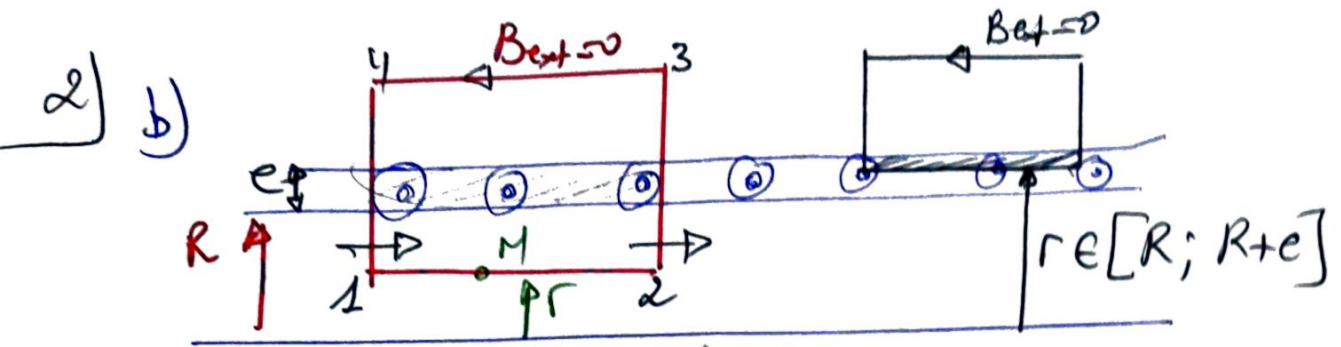
$$\vec{B}_{\text{dipôle}} = \begin{cases} \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} 2 \cos \theta \vec{e}_r \\ \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \sin \theta \vec{e}_\theta \end{cases} \quad \text{dipôle}$$

grad. $\left| \frac{\partial}{\partial r} \right|$
 $\left| \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right|$

$$\vec{E}_{\text{dipôle}} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

$\# \quad \frac{V}{m}$ dém



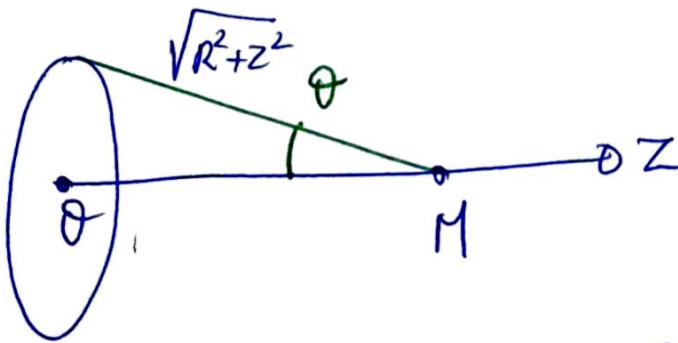


$$\oint \vec{B} d\vec{l} = l B_{12}(r)$$

$$r \leq R: I_{enc} = j_0 \cdot l \cdot e$$

$$r \in [R; R+e] \quad I_{enc} = j_0 \cdot l \cdot [R+e-r]$$

Ex 4

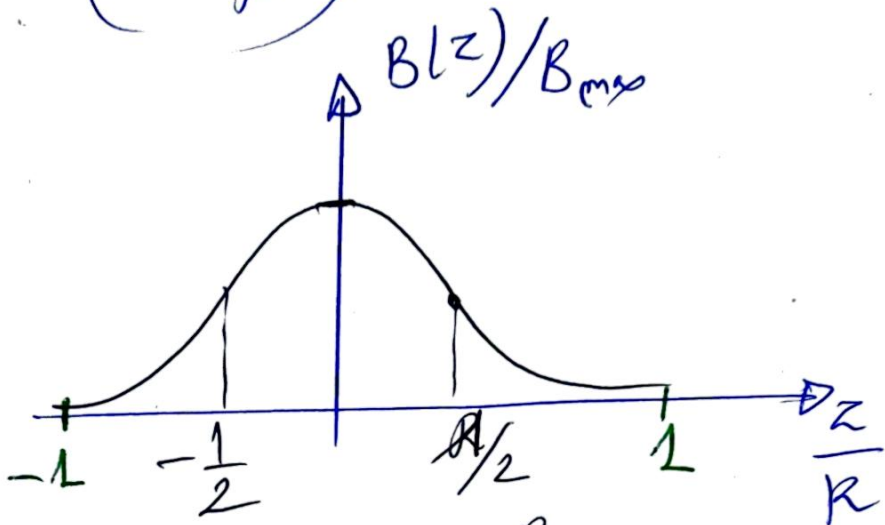


$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2R} \sin^3 \theta \vec{e}_z ; \quad \sin \theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$B(z) = \frac{\mu_0 i}{2R} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right)^{-3/2}$$

$$B(0) = B_{max}$$

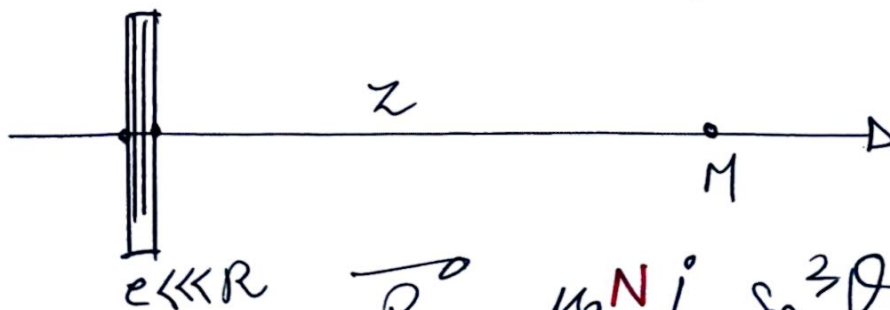
$$\frac{B(z)}{B_{max}} = \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-3/2}$$



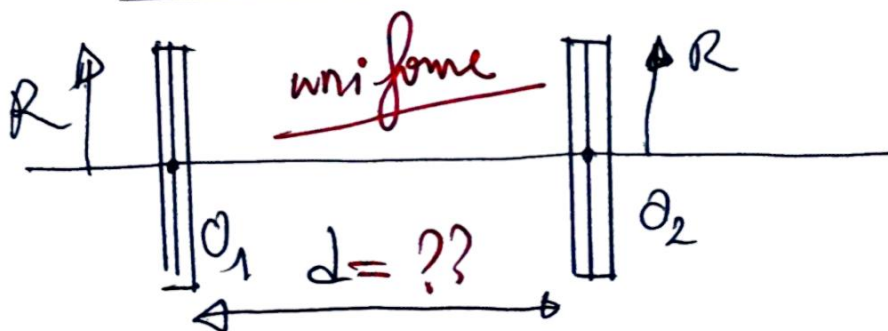
$$B''(z) = 0 \quad z = \pm \frac{R}{2}$$

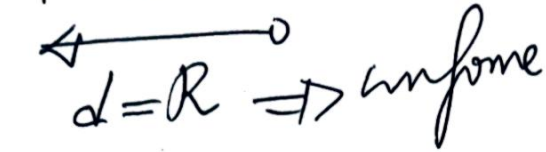
↙ ↘

Pg: bobine plate $\Rightarrow N B_{spire}$



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N i}{2R} \sin^3 \theta \vec{e}_z$$

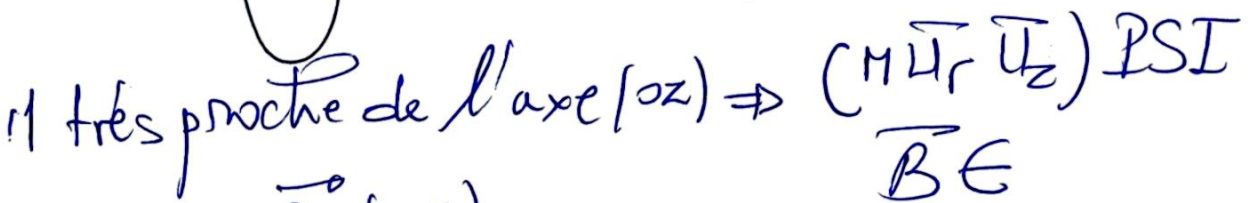




$$\|\vec{B}\| = \frac{1}{2} \frac{T}{T}$$

40 mT

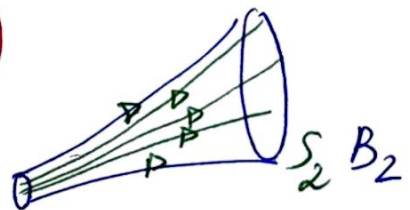
PT2 2012



$$\vec{B} = \begin{cases} \vec{B}_\perp(r, z) \\ \vec{B}_z(r, z) \simeq \vec{B}_z(0, z) \end{cases}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{div } \vec{B} = 0}$$

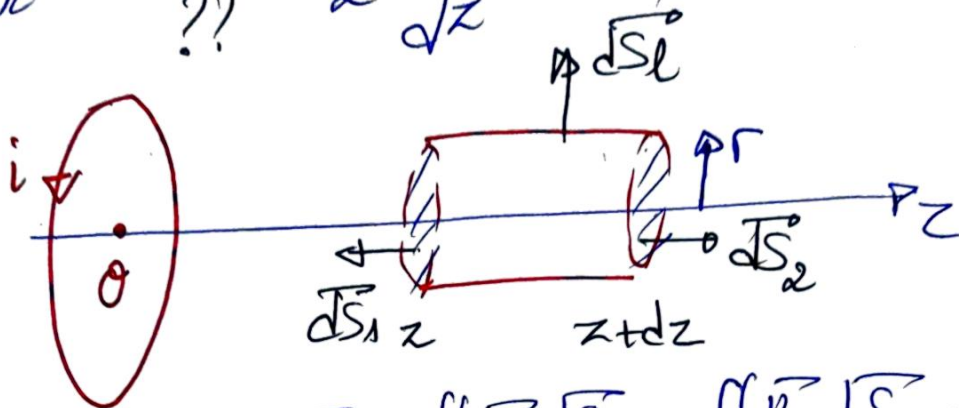


B_1, S_1

$$S_1 < S_2$$

$$B_1 > B_2$$

$$b) B_{\theta}(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_z(0, z)}{dz}$$



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}_1 + \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}_2 + \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}_{\text{slat}}$$

$\downarrow \vec{u}_z$ $\downarrow \vec{u}_z$ $\downarrow \vec{u}_r$

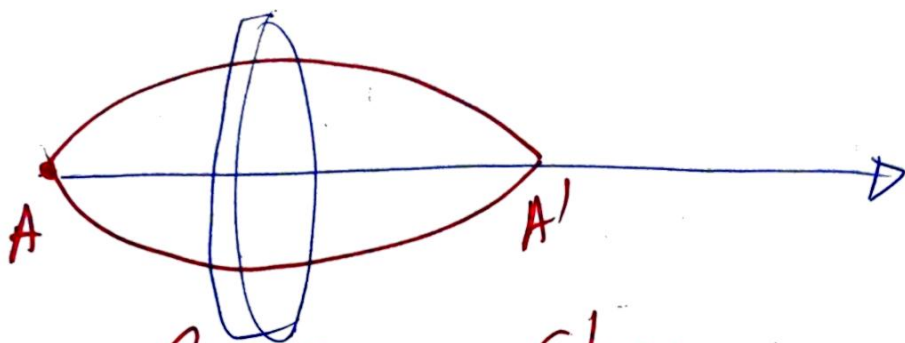
$$= -B_z(0, z) \pi r^2 + B_z(0, z+dz) \pi r^2 + B_{\theta}(r, z) \cdot (2\pi r) dz$$

$$= \pi r^2 [B_z(0, z+dz) - B_z(0, z)] + 2\pi r B_{\theta}(r, z) dz$$

$$= \pi r^2 \left[\frac{dB_z(0, z)}{dz} dz \right] + 2\pi r B_{\theta}(r, z) dz$$

$$f(r+dr) = f(r) + dr f'(r) + \frac{(dr)^2}{2!} f''(r)$$

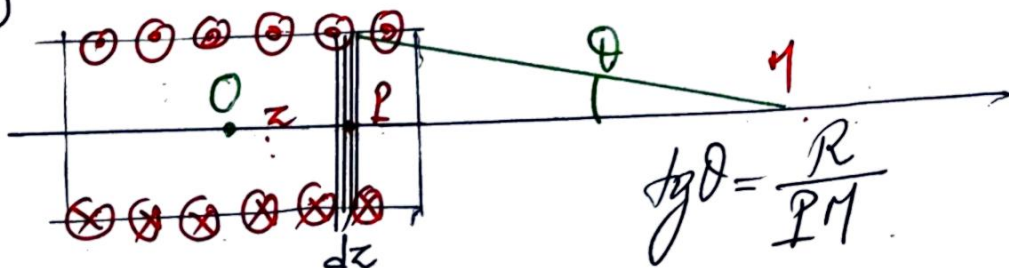
$$B_{\theta} = -\frac{r}{2} \frac{dB_z(0, z)}{dz}$$



Lenhille magnétique

$$\frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}}$$

3)



$$\vec{dB}^0 = \frac{\mu_0 dI}{2R} \sin^3 \theta \vec{e}_z, \quad n = \frac{N}{l}$$

$$dI = dN \quad \left| \begin{array}{l} N \rightarrow l \\ dN \rightarrow dz \end{array} \right.$$

$$\frac{dN}{N} = \frac{dz}{l} \Rightarrow dN = n dz$$

$$dB = \frac{\mu_0 n i}{2R} \sin^3 \theta \, dz$$

b) $\underline{PM}$ $PM = R (\cos \theta)$

$$d(PM) = R d(\cos \theta) = R \left(\frac{-d\theta}{\sin^2 \theta} \right)$$

or $d(PM) = -dz$

$$dB = \left(\frac{\mu_0 n i}{2R} \sin^3 \theta \right) \cdot \left(\frac{+R d\theta}{\sin^2 \theta} \right)$$

$$B = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\mu_0 n i}{2} \sin \theta \, d\theta$$

$$B = \frac{\mu_0 n i}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

$$\overline{OM} = \overline{OP} + \overline{PM}$$

$$d(\overline{OM}) = 0 = dz + d(\overline{PM})$$

$$\frac{d}{dz} A_1 = -\infty, \quad \theta_1 \approx 0$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 n i}{2} (1 - \cos \theta_2) \vec{e}_z$$

en outre $A_2 = +\infty, \quad \theta_2 = \pi$

$$\vec{B} = \mu_0 n i \vec{e}_z$$

4) $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_{int}(r) l$

$$= \mu_0 \int \vec{j}_s \cdot d\vec{n}$$

$$= \mu_0 j_s l \Rightarrow \boxed{B_{int} = \mu_0 j_s \vec{e}_z}$$

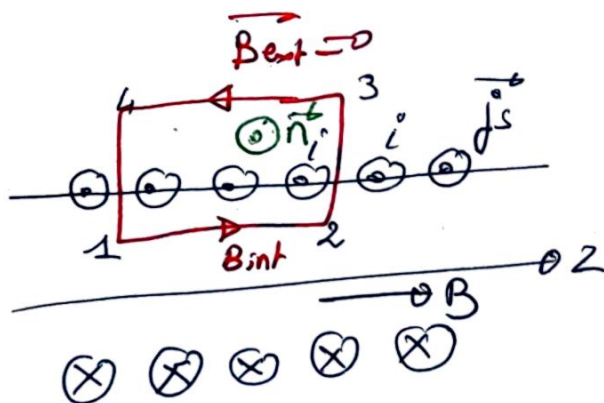
Pq: $I = j_s l = N i \Rightarrow j_s = \left(\frac{N}{l}\right) i$

$$\boxed{j_s = n i}$$

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$$

$$\vec{B}_{ext} - \vec{B}_{int} = \mu_0 j_s (\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_r)$$

$$\downarrow \quad \boxed{\vec{B}_{int} = \mu_0 j_s (+\vec{e}_z)}$$



$$5) \int_s \left\{ \begin{aligned} (j_s \cos \alpha) \vec{e}_\varphi &\longrightarrow \vec{B}_1 \\ (j_s \sin \alpha) \vec{e}_z &\longrightarrow \vec{B}_2 \end{aligned} \right.$$



$$\vec{B}_1(r < R) = \mu_0 \int_s \cos \alpha \vec{e}_z$$

$$\vec{B}_1(r > R) = \vec{0}$$

$$\vec{B}_2(r > R) = \frac{\mu_0 (j_s \sin \alpha) R}{r} \vec{e}_\varphi$$

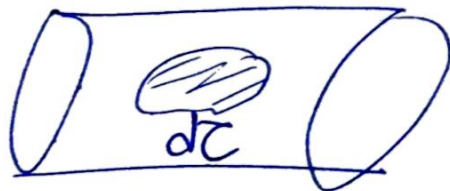
$$\vec{B}_2(r < R) = \vec{0}$$

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = q (\vec{E} + (\vec{v} \wedge \vec{B}))$$

$$\vec{F}_{\text{mag}} = q (\vec{v} \wedge \vec{B}); \quad \vec{F}_{\text{el}} = q \vec{E}$$

$$d\vec{F}_{\text{mag}} = dq (\vec{v} \wedge \vec{B})$$

$\swarrow$
 $q \cdot dz$



$$d\vec{F}_{\text{mag}} = \left[\vec{v} \wedge \vec{B} \right] dz = (\vec{v} \wedge \vec{B}) dz$$