

## SERIE N°2 INDUCTION

### Exercice 1 : PINCE AMPERE-METRIQUE

A- On considère un tore de section carrée de côté  $2a$  et de rayon  $R$  (figure 1) sur lequel on a enroulé  $N$  spires jointives, les deux extrémités du fil étant court-circuitées.

La figure 1 représente la moitié du tore délimitée par un plan passant par l'axe  $(O,z)$  le bobinage n'est pas dessiné. L'espace est rapporté à un système de coordonnées cylindrique  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ . Chaque spire est contenue dans un plan méridien  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ . Le circuit est parcouru par un courant d'intensité  $I$ .

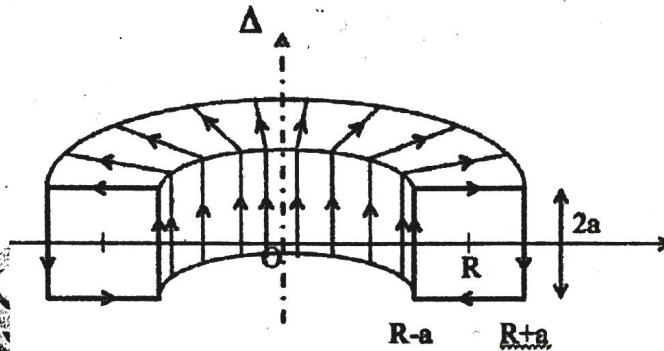


Figure 1

*Schéma représentant la bobine torique de section carrée d'écrite dans l'énoncé, une moitié seulement ;*

- 1- A l'aide des propriétés de symétrie de la distribution de courant, déterminer les propriétés géométriques du champ magnétique  $\vec{B}$  ( $M$ ) qu'elle génère.
- 2- Calculer le champ magnétique  $\vec{B}$  ( $M$ ) en un point quelconque de l'espace.
- 3- En déduire l'inductance propre  $L$  de ce circuit par deux méthodes :
  - a- Calcul direct du flux  $\Phi$ .
  - b- Par l'intermédiaire de l'énergie magnétique  $W_{\text{mag}}$ .
- c- Dans le cas  $a \ll R$  mettre l'inductance propre  $L$  sous la forme suivante ;  $L = L_0 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{R} \right)^2 \right]$
- d- Calculer la valeur maximale que doit avoir le rapport  $a/R$  pour que l'on puisse considérer que  $L \approx L_0$  avec une précision de 1%.

#### B- Etude d'une bobine à noyau torique

Une bobine est constituée de  $n_1$  spires pratiquement jointives de rayon  $a$ , enroulées en une seule couche sur un tore moyen  $r_0$ . L'enroulement est réalisé avec un fil de cuivre de diamètre  $d \ll a$ . La bobine est parcourue par un courant  $I$ .

- 1- Quelle est l'allure des lignes de champ magnétique ?
- 2- Exprimer le champ magnétique  $\vec{B}$  en un point  $P$  situé à l'intérieur du tore et repéré par les coordonnées cylindriques  $OP = \rho$  et  $\phi$ . On considérera pour cela que  $r_0 \gg a$  et on se limitera aux termes du second ordre dans le développement limité.
- 3- Mettre l'inductance propre  $L$  sous la forme suivante :  $L = L_0 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{r_0} \right)^2 \right]$  On considérera pour cela que  $r_0 \gg a$  et on se limitera aux termes du second ordre dans le développement limité.

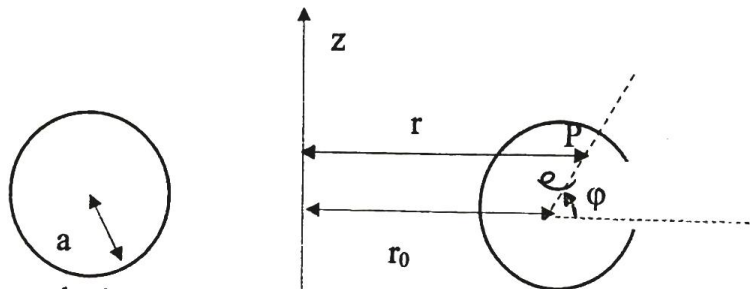


Figure 2

C- On considère à nouveau le circuit torique décrit dans A avec ses mêmes caractéristiques géométriques. On place dans sa partie centrale un fil infini se confondant avec l'axe (Oz). Le fil est parcouru par le courant  $I_1(t)$ , alors que le tore est parcouru par un courant induit  $I_2(t)$  (phénomène d'induction).

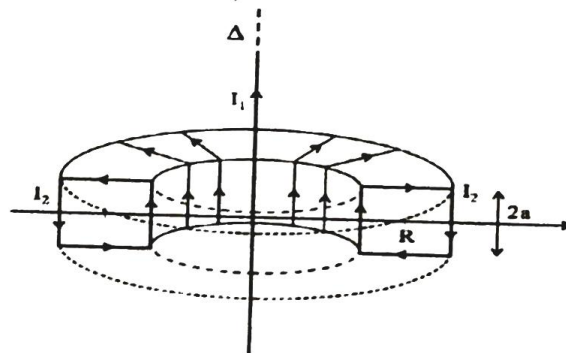


Figure 3

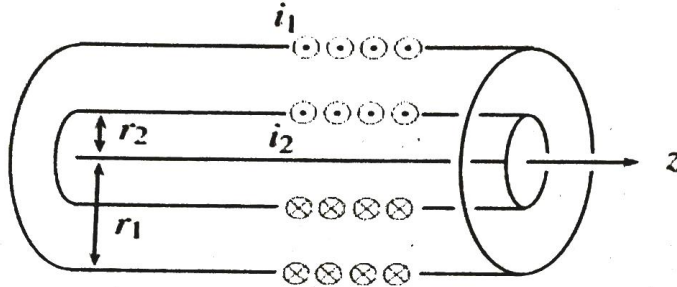
La figure 3 décrit le dispositif étudié sur lequel est représentée les spires du circuit torique. Elle précise en outre les orientations des courants. La résistance du circuit torique est notée  $r$  et ses extrémités ne sont plus court-circuitées mais connectées à un voltmètre d'impédance interne  $R_v$ .

- 1- Calculer le flux du champ  $\vec{B}_1(M)$ , crée par le fil "infini" (circuit 1, parcouru par le courant  $I_1$ ), à travers la bobine (circuit 2).
- 2- Définir le coefficient d'inductance mutuelle du circuit 1 à travers le circuit 2, qu'on notera  $M_{12}$ , et déduire son expression de la question précédente.
- 3- Calculer de même le flux du champ  $\vec{B}_2(M)$ , crée par la bobine (circuit 2, parcouru par le courant  $I_2$ ) à travers le circuit 1 (fil "infini", avec retour du courant et fermeture du circuit loin de la région occupée par la bobine torique, comme dans la question 1). En déduire l'expression du coefficient d'induction  $M_{21}$  du circuit 2 à travers le circuit 1. Conclure
- 4- Le courant  $I_1(t)$  est sinusoïdal et a pour expression  $I_1(t) = I_{01} \cos(\omega t)$  établir la relation différentielle suivante :  $\alpha \frac{dI_2}{dt} + \beta I_2 = -\frac{\alpha}{N} \frac{dI_1}{dt}$  ;  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes à déterminer.
- 5- En régime sinusoïdal forcé, déterminer l'expression du courant  $I_2(t)$  dans le tore et en déduire la tension  $U(t)$  mesurée par le voltmètre.
- 6- Ecrire la fonction de transfert sous la forme suivante :  $\underline{H} = \frac{U}{I_1} = H_{max} \left( -j \frac{\omega}{\omega_0} \right) \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$ .
- 7- Tracer le diagramme de Bode : Quel est l'intérêt de ce dispositif ? Préciser son cadre d'application.

## Exercice 2 : ÉCRANTAGE D'UN CHAMP MAGNETIQUE

On se place dans tout le problème dans l'approximation des régimes quasi permanents.

On considère deux solénoïdes  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  coaxiaux, d'axe  $(Oz)$ , de même longueur  $L = 20$  cm, de rayons  $r_1 = 10$  cm et  $r_2 = 5$  cm et comportant respectivement  $N_1 = 700$  et  $N_2 = 500$  spires jointives, enroulées dans le même sens :



Dans toute la suite on négligera les effets de bord ; on considèrera donc les solénoïdes comme très longs. Ces deux bobines ont pour résistance respectivement  $R_1$  et  $R_2 = 50 \Omega$ . On pourra introduire les nombres de spires par unité de longueur  $n_i = N/L$ .

1. Le solénoïde  $\Sigma_1$  est parcouru par un courant d'intensité  $i$ ,  $\Sigma_2$  étant en circuit ouvert.

- Exprimer le champ magnétique  $\vec{B}_1$  créé dans tout l'espace.
- En déduire le coefficient d'inductance  $L_1$  de  $\Sigma_1$  ; donner l'expression de  $L_2$ , inductance de  $\Sigma_2$  et calculer sa valeur numérique.
- Déterminer l'expression le coefficient de mutuelle inductance  $M$  entre les deux solénoïdes

2. Le solénoïde  $\Sigma_1$  est alimenté par un générateur idéal de courant électromoteur  $i_0(t) = I_0 \cos(\omega t)$  avec  $I_0 = 1$  A ; les deux extrémités du solénoïde  $\Sigma_2$  sont reliées par un fil sans résistance.

- Déterminer l'amplitude complexe du courant  $i_2(t)$  circulant dans  $\Sigma_2$  en fonction de  $M$ ,  $L_2$  et  $R_2$ . La mettre sous la forme :  $i_2 = K \frac{j\omega}{1+j\omega} i_0$ .

On donnera l'expression de  $K$  en fonction de  $N_1$  et  $N_2$  et celle de  $\omega_c$  en fonction de  $R_2$  et  $L_2$ .

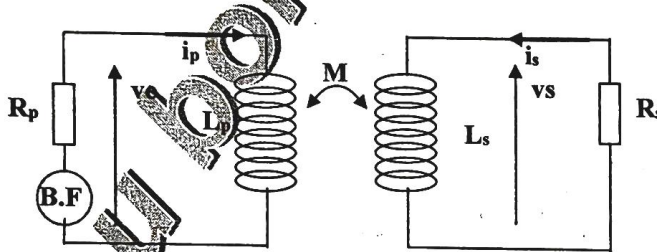
- En déduire l'expression de l'amplitude complexe  $B_2$  du champ magnétique total à l'intérieur du solénoïde  $\Sigma_2$ . Montrer que ce champ tend vers 0 à haute fréquence. Commenter.

- Application numérique : calculer  $\omega_c$  ainsi que les amplitudes de  $i_2$  et de  $B_2$  pour une fréquence de 11 kHz. Calculer le rapport des amplitudes  $B_2/B_1$ .

**Exercice 3 : ETUDE D'UN TRANSFORMATEUR****A- Etude du transformateur**

Un transformateur se compose de deux bobines distinctes primaire et secondaire enroulées sur une carcasse en fer doux.

- Le circuit primaire (à gauche sur le schéma) est caractérisé par une auto-inductance  $L_p$ , et une résistance  $R_p$ , formé de  $N_p$  spires. Il est alimenté par un générateur idéal de tension d'amplitude  $E$  à la pulsation  $\omega$ .
  - Le circuit secondaire (à droite sur le schéma) est caractérisé par une auto-inductance  $L_s$ , et une résistance  $R_s$  qui prend à la fois la résistance de la bobine et du dipôle qu'on cherche à alimenter, formé de  $N_s$  spires.
  - Le coefficient mutuelle  $M$  entre les deux solénoïdes est positif.
- 1- Enoncer la loi de Faraday.
  - 2- Montrer que le primaire et le secondaire sont le siège d'un phénomène d'induction. Quel type de Neumann ou de Lorentz.



- 3- Calculer alors les forces électromotrices induites dans le primaire et le secondaire.
- 4- Etablir le système d'équations couplées vérifiées par les intensités  $i_p$  et  $i_s$  en régime sinusoïdal établi.
- 5- En déduire le rapport complexe  $\frac{I_s}{I_p}$ , puis l'expression de  $i_p$  en fonction de  $E$  et des caractéristiques des circuits.

**Transformateur idéal**

On considère maintenant le cas d'un transformateur idéal vérifiant :  $L_p \cdot L_s = M^2$  ;  $\frac{L_s}{L_p} = \left(\frac{N_s}{N_p}\right)^2$  ; couplage total.

Les résistances sont négligeables devant les impédances inductives.

- 6- Simplifier l'expression précédente de  $I_p$  (l'exprimer en fonction de  $E$ ,  $R_s$ , et  $R_p$ ). Interpréter à quoi est équivalent le circuit secondaire vu du circuit primaire.
- 7- Etablir les expressions des rapports  $\frac{V_s}{V_e}$  et  $\frac{I_s}{I_p}$  en fonction de  $N_p$  et  $N_s$
- 8- On introduit un rhéostat  $R_p$  dans le circuit primaire. Quelle valeur de  $m$  faut-il donner à ce transformateur pour que la puissance dissipée dans la charge  $R_s$  soit maximale.

**B- Etude de la fonction de transfert**

On relie en série avec l'enroulement primaire une résistance  $R_p$ . L'enroulement secondaire est connecté sur une résistance de charge  $R_s = R_p = r$ . On prend le cas où :  $L_p = L_s = L$ . On se place en régime sinusoïdal de pulsation  $\omega$ ,  $v_1 = E\sqrt{2} \cos \omega t$ . (tension du générateur GBF) ;  $k$  coefficient de couplage  $k = M/\sqrt{L_p L_s}$

- 1- Etablir les expressions complexes de  $\underline{V}_1$  et  $\underline{V}_2$  (tension de sortie) en fonction de  $L$ ,  $M$ ,  $\omega$ ,  $r$ ,  $i_p$  et  $i_s$ .
- 2- En déduire que la fonction de transfert :

$$\bar{H} = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = \frac{H_0}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} ; \text{ avec } H_0 = \frac{k}{2}, Q = \frac{1}{2} \frac{L}{r} \text{ et } \omega_0 = \frac{r}{L \sqrt{1-k^2}} ;$$

- 3- On se place dans le cas d'un couplage total ( $k = 1$ ).
- a- Montrer que  $\bar{H} = \frac{H_0}{1 - j \frac{\omega_0}{\omega}}$ , déterminer  $H_0$  et  $\omega_0$ . En déduire l'expression du gain en décibel  $G_{dB}$ .
- b- Déterminer en fonction de  $H_0$ ,  $\omega_0$  et  $\log \omega$ , les équations des asymptotes lorsque :  $\omega$  tend vers zéro et  $\infty$ .
- c- Tracer le diagramme de Bode.
- d- En déduire la nature du filtre et sa bande passante en fonction des données du problème.
- 4- On se place dans le cas où le couplage n'est pas total.
- a- Donner l'expression du gain en décibel  $G_{dB}$
- b- Déterminer en fonction de  $H_0$ ,  $\omega_0$  et  $\log \omega$ , les équations des asymptotes lorsque :  $\omega$  tend vers zéro et  $\infty$ .
- c- Tracer le diagramme de Bode.
- d- En déduire la nature du filtre et sa bande passante en fonction des données du problème.

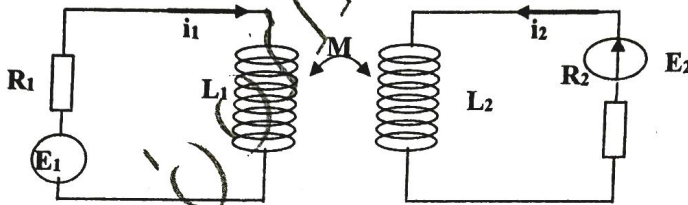
# Exercice 4 : CIRCUITS COUPLES

1- Soit les deux circuits couplés représentés ci-dessous. On suppose que le coefficient d'inductance mutuelle  $M$  est positif,  $L_1 = L_2 = L$  et  $R_1 = R_2 = R$ .  $E$  désigne la f.e.m constante du générateur.

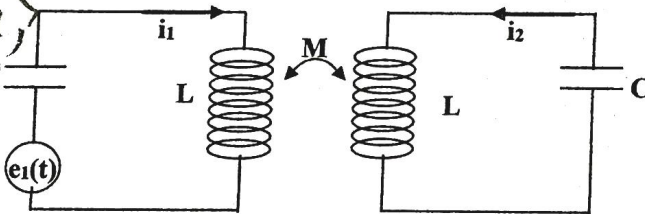
a- Ecrire les deux équations différentielles couplées vérifiées par  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$ .

b- En déduire deux équations différentielles découplées par le changement de variable :  $I = i_1 + i_2$  et  $J = i_1 - i_2$ .

c- Déterminer les expressions de  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$  dans le cas où  $M < L$ .



2- Considérons deux circuits identiques. Chacun est constitué d'une bobine d'inductance propre  $L$ , de résistance négligeable, d'inductance mutuelle  $M$  et d'un condensateur de capacité  $C$ . L'un des circuits est alimenté par un générateur  $e_1(t)$  (voir Figure ci-dessous).



Un couplage est réalisé par inductance mutuelle entre les deux oscillateurs électriques.

a- Etablir les équations différentielles régissant  $q_1(t)$  et  $q_2(t)$ .

b- On suppose que  $e_1(t) = 0$  (régime libre). En faisant les changements de variables  $p = q_1 + q_2$  et  $r = q_1 - q_2$

♣ En déduire les équations différentielles non couplées de  $p(t)$  et  $r(t)$ .

♣♣ Trouver les pulsations propres  $\omega_{1s}$  et  $\omega_{2a}$  des modes symétrique et antisymétrique

c- Si  $M \ll L$ , comparer  $\omega_{1s}$  et  $\omega_{2a}$ . Déterminer l'expression de la tension  $u_{c1}(t)$  en fonction de  $M$ ,  $L$  et  $\omega_0$  (pulsation propre). Le couplage est faible.

(le condensateur primaire est chargé sous  $u_0$  à l'instant  $t = 0s$ ,  $i_1(0) = 0$  ;  $i_2(0) = 0$ ) ?

d- Quelle est alors l'allure du graphe de  $u_{c1}$ . Comment s'appellent t'on ce phénomène observé ?

e- Trouver l'expression suivante :  $k = \frac{M}{L} = \frac{2T_0}{T_b}$  ;  $T_b$  période de battement ;  $k$  : coefficient de couplage

3- On suppose maintenant que  $e_1(t) = E_1 \cos(\omega t)$ .

a- Déterminer les équations régissant  $q_1(t)$  et  $q_2(t)$  en notation complexes.

b- En utilisant la méthode de déterminant, résoudre le système précédent et déterminer les d.d.p :  $u_{c1}(t)$  et  $u_{c2}(t)$  aux bornes des deux condensateurs en régime forcé.

## 1- La roue de Barlow

Un disque métallique de rayon  $OA = a$  peut tourner sans frottement dans le plan vertical autour de l'axe  $Oz$ . Il est alimenté sur son axe, au point  $O$ , par un générateur de tension  $E$ , le circuit étant fermé au point  $A$ , où la circonférence trempe dans un bain de mercure ; la résistance totale du circuit est  $R$ .

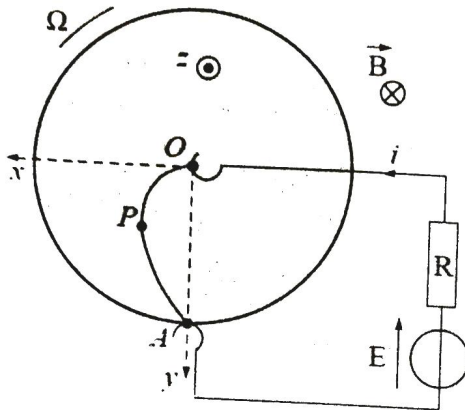


Figure 1

- Prévoir le sens de rotation de la roue, initialement immobile, puis choisir les vecteurs unitaires  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$  en conséquence, sachant que l'orientation positive du circuit est prise selon  $\vec{u}_r$  dirigé de  $O$  vers  $A$ .
- Evaluer d'abord la force électromotrice  $\mathcal{E}_{OA}$  et le moment  $\vec{M}_L^O$  en  $O$  de la force de Laplace. On note  $i(t)$  l'intensité du courant qui circule dans ce circuit.
- Ecrire les équations mécanique et électrique du système sachant que le moment d'inertie  $J$  du disque de masse  $m$  par rapport à l'axe de rotation  $Oz$  est  $J = ma^2/2$  et en déduire l'équation d'évolution de la vitesse  $\omega(t)$  sous la forme :  $\tau \frac{d\omega}{dt} + \omega = \omega_\ell$ . Donner la solution  $\omega(t)$  avec  $\omega(0) = 0$ , Interpréter les expressions de  $\tau$  et  $\omega_\ell$ .
- Ecrire et commenter le bilan de puissance.

## 2- Deux roues de Barlow couplées

Deux disques identiques au précédent peuvent tourner librement autour d'un axe horizontal commun  $OO'z$ , qui est aussi l'axe du champ uniforme qui règne dans l'espace considéré ;  $\omega(0) = \omega_0$  et  $\omega'(0) = 0$  (figure 2). Le circuit est fermé sur lui-même sur l'axe  $OO'$  d'une part, à l'extrémité  $AA'$  d'autre part et les frottements sont négligeables ; la résistance totale du circuit est  $R$ .

- Prévoir dans quel sens va se mettre à tourner le disque ( $D'$ ).
- Ecrire la loi des mailles.
- Ecrire les deux équations différentielles qui relient d'une part  $\omega(t)$  et  $i(t)$  et d'autre part  $\omega'(t)$  et  $i(t)$ .
- Donner les solutions de  $i(t)$ ,  $\omega(t)$  et  $\omega'(t)$ .
- Toute l'énergie cinétique perdue par ( $D$ ) est-elle récupérée par ( $D'$ )

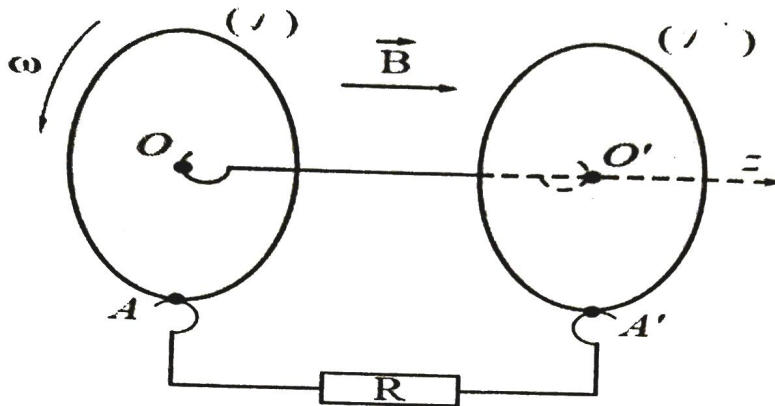
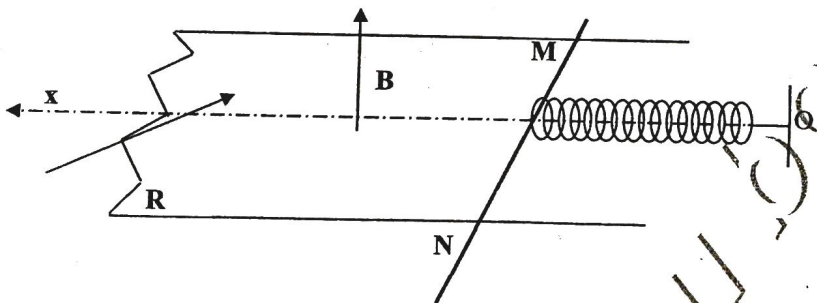


Figure 2

**Exercice 6 :**

- 1- Sur deux rails conducteurs, horizontaux et parallèles, de résistance négligeables, distants de  $l$ , on pose une tige (T) de résistance  $r$ , de masse  $m$ , qui leur est perpendiculaire. La tige (T) est reliée en son milieu à un ressort de raideur  $k$  dont l'autre extrémité O est fixée et dont l'axe Ox est parallèle aux rails : le circuit des rails est fermé sur une résistance extérieure R variable. On écarte la tige (T) de la quantité  $a$ , puis on l'abandonne.
- Ecrire l'équation différentielle du mouvement de la tige.
  - Pour quelle valeur  $R = R_0$  de la résistance le retour de la tige à sa position d'équilibre est-il atteint le plus rapidement ? écrire alors l'équation qui régit le mouvement de la tige.



- 2- Le plan des rails (et du ressort) est maintenant incliné d'un angle  $\alpha$  sur l'horizontale de façon que l'axe Ox constitue une ligne de plus grande pente, dirigée vers le bas. Déterminer la nouvelle valeur  $R = R'_0$  de la résistance pour laquelle l'équilibre est atteint le plus rapidement

**Exercice 3: Création d'un champ tournant**

A- On considère le circuit électrique de la figure suivante qui comporte un générateur idéal de tension sinusoïdale  $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ , ou encore  $u(t) = U_0/\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_0)$ , un condensateur de capacité  $C$  et deux bobines identiques ( $b_1$ ) et ( $b_2$ ), d'inductance propre  $L$  et de résistance  $R$ . (on néglige l'inductance mutuelle entre les deux bobines).

Les bobines ( $b_1$ ) et ( $b_2$ ) sont disposées de manière à ce que leurs axes soient perpendiculaires en  $O$  : ( $b_1$ ) crée ainsi en  $O$  un champ magnétique colinéaire à l'axe  $Ox$ , soit  $\vec{B}_1 = B_1 \vec{u}_x$ , et ( $b_2$ ) crée ainsi en  $O$  un champ magnétique colinéaire à l'axe  $Oy$ , soit  $\vec{B}_2 = B_2 \vec{u}_y$  (voir Figure 4). Les mesures algébriques des champs sont proportionnelles aux intensités qui traversent chaque bobine :  $B_1(t) = k i_1(t)$  et  $B_2(t) = k i_2(t)$  ( $k$  constante positive donnée).

1- On utilisant la notation complexe, déterminer les intensités  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$  les mettre sous la forme :

$$i_1(t) = I_{01} \cos(\omega t + \varphi_0 - \varphi_1) \text{ et } i_2(t) = I_{02} \cos(\omega t + \varphi_0 - \varphi_2).$$

Exprimer  $I_{01}, I_{02}, \varphi_1, \varphi_2$  en fonction de  $R, L, C$  et  $\omega$  (on suppose  $\varphi_1, \varphi_2 \in [-\pi/2; +\pi/2]$ ).

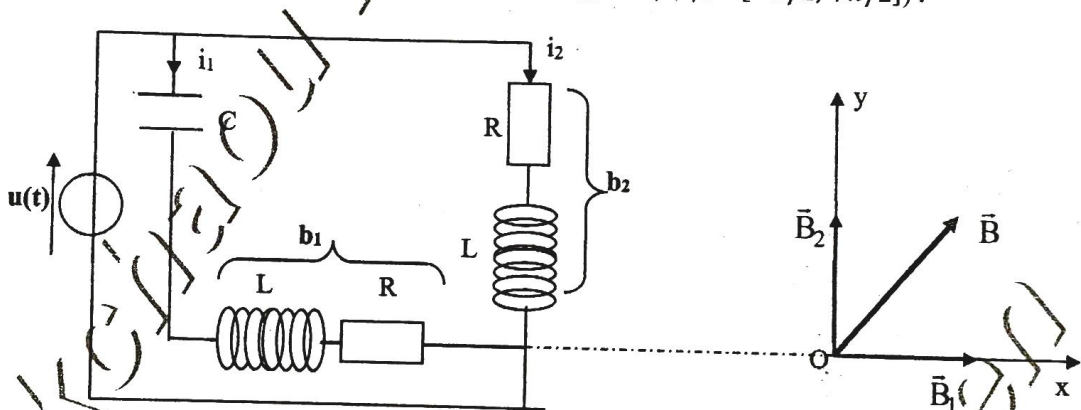
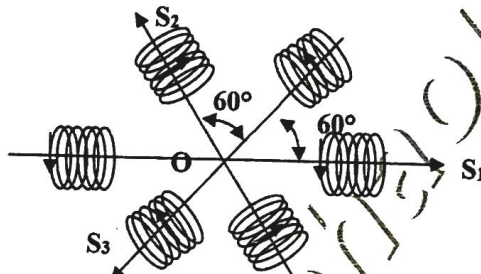


Figure 4

- 2- Quelle doit être la relation entre  $C, L$  et  $\omega$  et pour que les amplitudes  $I_{01}, I_{02}$ , des courants soient égales ? Quelle relation lie alors les déphasages  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  ? Quel est le signe de  $\varphi_1$  ? et  $\varphi_2$  ?
  - 3- Quelle doit être la relation entre  $R, L$  et  $\omega$  si l'on souhaite en outre  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$  ?
  - 4- Les deux conditions précédentes étant réunies, montrer que par un choix judicieux de  $\varphi_0$  que l'on précisera,  $B_1$  et  $B_2$  peuvent se mettre sous la forme  $B_1(t) = B_0 \cos(\omega t)$  et  $B_2(t) = B_0 \sin(\omega t)$ . Exprimer  $B_0$  en fonction de  $k, U_0$  et  $R$ . Préciser les caractéristiques du champ total  $\vec{B}$  créé par les deux bobines en  $O$ .
- B- Trois systèmes de solénoïdes ( $S_1$ ) ( $S_2$ ) et ( $S_3$ ) identiques sont disposés de telle sorte que leur centre soit confondu en  $O$  et que leurs axes orientés soient disposées à  $120^\circ$  les uns des autres



- 1- Ces solénoïdes sont alimentés en série, en respectant les sens indiqués sur la figure par un courant sinusoïdal de valeur efficace  $I$  et de pulsation  $\omega$ . Que vaut alors le champ magnétique en  $O$ , centre du système ?
- 2- A présent, les trois paires de solénoïdes sont alimentées respectivement par trois courants alternatifs mais déphasés les uns par rapport aux autres d'une quantité  $\frac{2\pi}{3}$ .

$$i_1(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t); \quad i_2(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}); \quad i_3(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3})$$

Les mesures des champs sont proportionnelles aux intensités qui traversent chaque bobine :  $B_j = k i(t)$

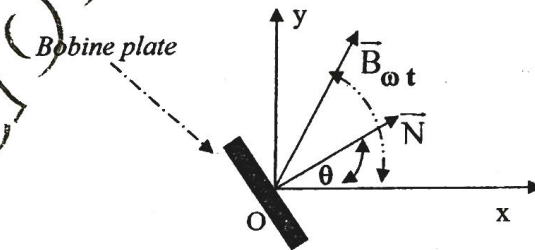
On associe à chaque vecteur son affixe dans le plan polaire complexe associé. Montrer que le champ magnétique total s'écrit sous la forme :  $\vec{B} = \frac{3}{2} kl\sqrt{2} [\cos \omega t \vec{e}_x + \sin \omega t \vec{e}_y]$ .

3- A présent, on a  $n$  bobines sont alimentées respectivement par :  $i_0(t) = I_{\max} \cos(\omega t)$  ;  $i_\alpha(t) = I_{\max} \cos(\omega t - \alpha \frac{2\pi}{n})$  ;  $i_{n-1}(t) = I_{\max} \cos(\omega t - (n-1) \frac{2\pi}{n})$  ;  $\alpha \in [0, n-1]$

Montrer que le champ magnétique total s'écrit sous la forme :  $\vec{B}_{\text{tot}} = \frac{n}{2} B_m [\cos \omega t \vec{e}_x + \sin \omega t \vec{e}_y]$ .

#### Exercice 4 : Moteur asynchrone

Le champ magnétique tournant  $\vec{B} = B_0 [\cos \omega t \vec{e}_x + \sin \omega t \vec{e}_y]$  agit sur une petite bobine plate, de  $n$  spires de section  $S$ , fermée sur elle-même, d'inductance propre  $L_1$  et de résistance  $R_1$  (On suppose que le champ  $\vec{B}$  est uniforme sur toute la bobine plate). Le centre de la bobine coïncide avec le point  $O$  et la bobine tourne autour de l'axe  $Oz$  à la vitesse  $\Omega$  que l'on suppose constante : le vecteur unitaire  $\vec{N}$  normal au plan de bobine en  $O$  reste constamment dans le plan  $Oxy$  ; l'angle  $\theta = (\vec{u}_x, \vec{N})$  s'écrit donc  $\theta = \Omega t$  en supposant  $\theta = 0$  à l'instant initial.



- Déterminer la f.e.m induite par le champ  $\vec{B}$  dans la petite bobine et en déduire que cette bobine est parcourue par un courant  $i$  de la forme :  $i(t) = I_0 \sin(\omega - \Omega)t - \psi$ . Exprimer  $I_0$  et  $\psi$  en fonction de la constante  $\Phi_0 = n S B_0$  et de  $R_1, L_1, \omega, \Omega$ .
- Exprimer le moment  $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{u}_z$ , du couple électromagnétique subi par la petite bobine en fonction de  $\Phi_0, R_1, L_1, \omega, \Omega$  et  $t$ .
- Calculer la valeur moyenne  $\langle \Gamma \rangle$  de  $\Gamma$  en fonction de  $\Phi_0, R_1, L_1, \omega, \Omega$  ; tracer le graphe de  $\langle \Gamma \rangle$  en fonction de  $\Omega$  pour  $\Omega \in [0, \omega]$  (on suppose  $R_1 < L_1 \omega$ ). Pourquoi restreint-on l'étude à l'intervalle  $[0, \omega]$  ?
- Le moteur entraîne une machine tournante qui exerce sur lui un couple résistant de valeur moyenne constante  $-\Gamma_0 \vec{u}_z$  avec  $\Gamma_0$  positif. En raisonnant sur les valeurs moyennes, discuter le démarrage du moteur et la stabilité des régimes de fonctionnement.

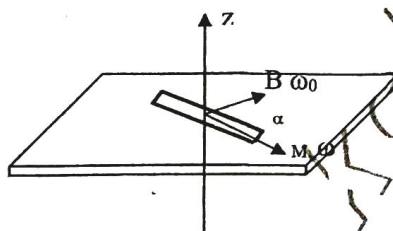
#### Exercice 5 : Moteur synchrone

Un montage convenable de bobines parcourus par des courants alternatifs de pulsation  $\omega_0$  produit dans un certain volume un champ magnétique  $\vec{B}$ , d'amplitude  $B_0$ , qui tourne dans un plan  $xOy$  autour d'un axe  $Oz$  avec la pulsation  $\omega_0$  constante.

D'autre part, une pièce mobile autour de l'axe  $Oz$  (le rotor) constituée d'un petit aimant permanent portant un dipôle  $\vec{M}$ , orthogonal à  $Oz$ , tourne dans le plan  $xOy$  avec un mouvement de rotation uniforme de pulsation  $\omega$ .

La valeur de l'angle  $(\vec{M}, \vec{B})$  à l'instant initial est notée  $\alpha$  comme indique la figure

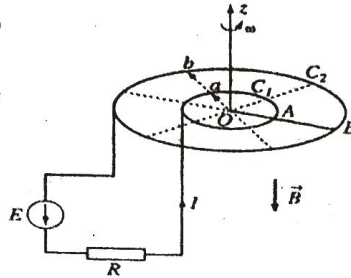
a- Calculer la valeur instantanée du couple magnétique  $\vec{\Gamma}$  exercé par le champ sur la pièce mobile. En déduire sa valeur moyenne au cours du temps.



b- Pour quelles valeurs de  $\omega$  et  $\alpha$  ce dispositif fonctionne-t-il en moteur ? quelle est dans ce cas la puissance maximale  $P_M$  qu'il peut fournir ?

c- Un régime permanent de fonctionnement du moteur est dit stable si, lorsque le moteur prend accidentellement de l'avance (ou du retard) sur son régime permanent, le jeu des forces qu'il subit fait perdre cette avance (ou du retard) ; il est instable dans le cas contraire. À partir du graphe  $\Gamma(\alpha)$ , déterminer le domaine de  $\alpha$  correspondant à un régime stable lorsque le moteur fournit un couple utile  $\Gamma_u$ .

### Exercice 6 : Principe du moteur continu



Le rotor d'un moteur tournant à la vitesse  $\omega$  autour de l'axe  $Oz$  est constitué de  $p$  tiges homogènes infiniment conductrices du type  $OB$ , toutes identiques, de masse  $m$  et de longueur  $l$ , régulièrement réparties et rigidement liées les unes aux autres.

Elles tournent dans le plan perpendiculaire à  $Oz$  en s'appuyant sur deux conducteurs circulaires  $C_1$  et  $C_2$  de rayons respectifs  $a$  et  $b$  aux bornes desquels est branché un générateur de tension constante  $E$  ; la résistance ohmique du circuit est équivalente à une résistance unique  $R$ .

Le stator (non représenté sur la figure) est constitué d'un aimant permanent (dit inducteur) qui, dans l'espace où se trouve l'équipage mobile, établit un champ magnétique constant et pris uniforme  $\vec{B} = -B_0 \vec{u}_z$ .

#### 1. Étude d'une tige seule

Supposons pour l'instant que le rotor soit constitué d'une seule tige  $OB$ , le courant  $I$  parcourant la tige entre les points de contact  $A$  et  $B$  dans le sens de  $A$  vers  $B$  qui est celui de  $\vec{u}_r$ .

- Calculer en fonction de  $B_0$ ,  $a$ ,  $b$  et  $\omega$ , la force électromotrice  $e_{AB}$  en négligeant le champ magnétique propre.
- Calculer en fonction de  $B_0$ ,  $a$ ,  $b$  et  $I$ , le moment par rapport à  $O$ ,  $\vec{M}^O$  des forces magnétiques exercées sur la tige. Quelle relation permet de vérifier la cohérence des deux résultats précédents ?

#### 2. Mouvement du rotor complet

On revient au système à  $p$  tiges décrit dans l'introduction, parcouru par un courant total  $I$ .

- Comment, d'un point de vue purement électrocinétique, sont disposés ces  $p$  conducteurs entre  $C_1$  et  $C_2$  ? Que devient alors la différence de potentiel  $V_A - V_B$  issue de la question 1.a) et comment s'obtient le moment des forces sur l'ensemble du rotor en fonction du résultat de la question 1.b) ? Quel intérêt y a-t-il à prendre  $p$  tiges ?
- Écrire les équations mécanique et électrique du système donnant  $I(t)$  et  $\omega(t)$  sachant que :

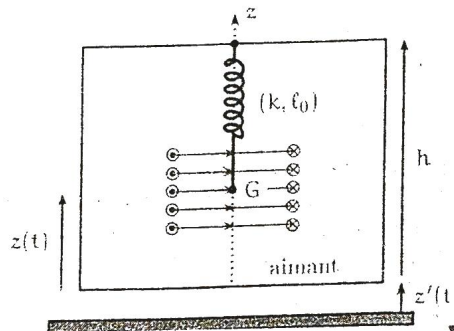
-  $J = m l^2 / 3$  est le moment d'inertie d'une tige par rapport à l'axe  $Oz$

- on impose au moteur (c'est son rôle) de fournir sur son arbre un couple de moment égal à  $\Gamma_e$ , constant ;
- le phénomène d'auto-induction du circuit est négligé.

c) En déduire l'équation différentielle relative à l'évolution de la vitesse angulaire  $\omega$ . Intégrer cette équation sachant qu'à l'instant initial le rotor est au repos, en introduisant un temps caractéristique  $\tau$  et une valeur limite  $\omega_l$ . AN : Calculer  $\omega_l$  et  $\tau$  pour  $E = 4 \text{ V}$  ;  $R = 1 \Omega$  ;  $B_0 = 0,1 \text{ T}$  ;  $a = 1 \text{ cm}$  ;  $b = 1,5 \text{ cm}$  ;  $m = 15 \text{ g}$  ;  $p = 10$  ;  $\Gamma_e = 2 \cdot 10^{-4} \text{ N.m}$ . Montrer que le couple  $\Gamma_e$ , fourni par le moteur à l'extérieur ne peut pas dépasser une valeur maximale  $\Gamma_{em}$ , à déterminer.

## Exercice 7 : MOUVEMENT DE LA BOBINE D'UN SEISMOGRAPHE

Un sismographe est constitué d'un bâti de hauteur interne  $h$ , auquel est fixé un aimant produisant un champ magnétique radial noté  $\vec{B} = B\vec{e}_r$ , en coordonnées cylindriques d'axe vertical. Une bobine de masse  $m$  d'axe vertical possédant  $N$  spires est suspendue par un ressort, de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ , à la partie supérieure du bâti. Elle est enroulée autour de l'aimant et peut coulisser sans frottement le long de l'axe vertical. On note  $L$  son inductance et  $R$  sa résistance. Elle est refermée sur elle-même (circuit électrique fermé). On note  $z(t)$  la position du centre de gravité de la bobine dans le référentiel lié au bâti du sismographe et  $z'(t)$  la grandeur qui décrit le mouvement du sol par rapport au référentiel géocentrique, supposé galiléen sur l'échelle de temps du séisme.

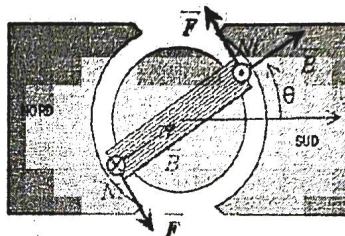
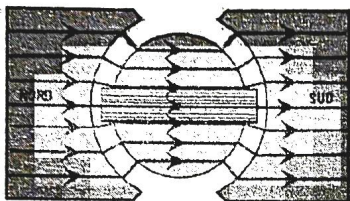


1. Pourquoi un courant se crée-t-il lors d'un séisme ?
2. Calculer la FEM :  $e(t)$  induite par le mouvement de la bobine en fonction de la longueur de bobinage  $\ell_b$ , du champ magnétique permanent créé par l'aimant et de  $z(t)$ .
3. En déduire une première équation différentielle entre  $z(t)$  et  $i(t)$ .
4. À l'aide de l'étude du mouvement de la bobine, trouver une deuxième équation différentielle liant  $i(t)$ ,  $z'(t)$  et  $x(t) = z(t) - z_{eq}$ , où  $z_{eq}$  est la position d'équilibre du bobinage en l'absence de séisme.
5. On suppose que l'onde sismique est sinusoïdale. On considère donc un mouvement forcé tel que  $z'(t) = a \cos(\omega t)$  et on cherchera des solutions forcées sinusoïdalement.
  - a. Déterminer la fonction de transfert.
  - b. Que se passe-t-il quand  $\omega \rightarrow 0$  ? Quand  $\omega \rightarrow +\infty$  ?
  - c. Quel type de filtre obtient-on ?

**Exercice 12 : Le galvanomètre à cadre mobile**

Le galvanomètre à cadre mobile est un appareil destiné à mesurer des intensités très faibles (jusqu'à 10mA). Cet appareil comporte :

- Un cadre rectangulaire constitué d'un nombre  $N$  spires. Ce cadre est suspendu à un fil de torsion  $C$  (couple)
- Un aimant permanent muni de pièces polaires cylindriques. Le cadre, mobile autour du cylindre creux de rayon  $a$ , de hauteur  $h$  et d'axe  $\Delta$ , confondu avec l'axe  $z$ . Dans l'entrefer, les lignes de champ magnétique sont radiales c'est-à-dire que leur support passe par l'axe  $\Delta$  de rotation. On néglige dans la suite du problème l'inductance propre du cadre ainsi que sa résistance.



On désigne par  $J$  le moment d'inertie du cadre par rapport à l'axe de rotation. La surface du rectangle constitué par une spire est  $S = 2ha$ . Si  $B$  désigne l'intensité du champ magnétique radial (supposé uniforme), on pose  $\Phi_0 = NBS$ . On néglige la résistance de l'air sur le cadre ainsi que tous les frottements.

1) Le galvanomètre est branché aux bornes d'un générateur de tension constante  $E_m$  et de résistance interne  $R$ . Le cadre est animé d'un mouvement de rotation autour de son axe  $\Delta$  et sa position est repérée par l'angle  $\theta(t)$  tel que lorsque  $\theta = 0$  le couple de rappel exerce par le fil de torsion est nul.

a. Exprimer la force électromotrice induite dans le cadre en fonction de  $\Phi_0$  et  $\theta$ .

Déduire l'équation électrique reliant l'intensité du courant  $i$  dans le cadre et  $\theta(t)$ .

b. Montrer que le moment des forces de Laplace exercées sur le cadre en rotation est donné par :  $M_\Delta = \Phi_0 i$ .

c. Faire un bilan énergétique à partir de deux équations établies précédemment.

d. Ecrire l'équation mécanique traduisant la rotation du cadre autour de  $\Delta$ .

2) Etablir l'équation différentielle du mouvement du cadre en fonction de la seule variable  $\theta(t)$ .

On s'intéresse, dans les questions 3), 4) et 5) au régime libre du mouvement ( $E_m = 0$ ).

3) Montrer que si la résistance  $R > R_c$ , le mouvement du cadre autour de sa position d'équilibre est pseudopériodique. Exprimer  $R_c$  en fonction de  $\Phi_0$ ,  $J$  et  $C$ .

Comment faut-il choisir la résistance  $R$  pour utiliser pratiquement un galvanomètre. Expliquer.

4) Montrer que l'équation différentielle du mouvement peut se mettre sous la forme :  $\ddot{\theta} + 2m\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

Où  $m$  et  $\omega_0$  sont des grandeurs à exprimer en fonction de  $C$ ,  $J$ ,  $R$  et  $R_c$ .

5) On considère dans la suite de cette question le mouvement pseudopériodique  $R > R_c$ .

La solution de l'équation précédente est donc de la forme  $\theta(t) = I \exp(-\frac{t}{\tau}) \cos(\omega t + \phi)$

Exprimer la constante du temps  $\tau$  et la pseudo-pulsation  $\omega$  en fonction de  $\omega_0$  et  $m$ .

6) Le galvanomètre est maintenant branché aux bornes d'une source de tension sinusoïdale  $E(t) = E_m \cos(\Omega t)$  et de résistance interne  $R = R_c$ . On suppose que  $\Omega T_c \gg 1$ . Soit  $\theta_m$  l'amplitude des oscillations forcées du cadre et  $\theta_0$  l'angle dans les mêmes conditions à l'équilibre lorsque la source délivre une tension constante  $E_m$ .

a) Quel est l'intérêt d'ajuster le fonctionnement du dispositif de telle sorte que  $R = R_c$ ?

b) Réécrire l'équation différentielle du mouvement qui correspond à ce fonctionnement.

c) En régime forcé, la solution de l'équation différentielle est de la forme  $\theta(t) = \theta_m \cos(\Omega t + \psi)$ :

Par le biais de la notation complexe, exprimer  $\theta_m$  en fonction de  $\Phi_0$ ,  $E_m$ ,  $\omega_0$ ,  $J$ ,  $R$  et  $\Omega$ .

d) En utilisant l'approximation proposée, montrer que :  $\theta_m \approx \frac{\Phi_0 E_m}{J R \Omega^2}$

e) En utilisant le résultat de la question 2), montrer que :  $\theta_m \approx \frac{\Phi_0 E_m}{J R \omega_0^2}$

f) Calculer le rapport  $\theta_m / \theta_0$ . Conclure.