

ELECTROMAGNETIQUE :DANS LES MILIEUX

SERIE N°3

Problème 1 : Notions de conduction dans les métaux

La conductivité peut être décrite dans le modèle simple suivant :

Un conducteur métallique est formé d'atomes ionisés fixes et d'électrons libres de densité n (nombre d'électrons libres par unité de volume), ces derniers assurant la conduction électrique. En plus des forces dues au champ électromagnétique, un électron de masse m et de charge $-e$ est soumis aux forces d'interaction (chocs) avec les ions, modélisés par une force de type frottement fluide $-m \frac{\vec{v}}{\tau}$, $\vec{v}$ étant la vitesse de l'électron par rapport au conducteur et τ une constante dépendant de la nature du matériau.

A. Conducteur en régime continu ; loi d'Ohm

1- Le conducteur est initialement en équilibre (électrons au repos). A partir de l'instant $t = 0$, un générateur extérieur impose de façon instantanée un champ électrique uniforme et constant, parallèle à l'axe Oz : $\vec{E} = E_0 \vec{u}_z$.

a- Écrire et intégrer l'équation du mouvement d'un électron en exprimant la vitesse en fonction de m , e , τ et $\vec{E}_0$. Que représente physiquement τ ?

b- Montrer qu'en régime permanent, $\vec{v}$ tend vers une valeur limite $\vec{v}_l$. En déduire la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \sigma_0 \vec{E}_0$ liant la densité de courant $\vec{j}_0$ au champ $\vec{E}_0$; exprimer la conductivité σ_0 en régime continu en fonction de n , e , m et τ . AN: Pour le cuivre $\sigma_0 = 5,8.10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$ et $n = 1,1.10^{29} m^{-3}$; $m = 9,1.10^{-31} kg$, en déduire la valeur numérique de τ . Commentaire.

2- Le conducteur est de forme cylindrique, de section constante S et de longueur L limitée entre deux points A et B de son axe Oz ($z_B - z_A = L$).

a- Montrer que la différence de potentiel entre les points A et B est proportionnelle au courant I traversant le cylindre : $V_A - V_B = R_0 I$.

Exprimer la résistance R_0 de la portion AB en fonction de L , σ_0 et S .

b- Déterminer la puissance P transmise par le générateur aux électrons situés entre A et B, en fonction de R_0 et I .

B. Conducteur en régime variable ; épaisseur de peau

1- Le générateur extérieur impose un champ électrique sinusoïdal de pulsation ω , parallèle à Oz ; en notation complexe : $\vec{E} = E_0 \exp(i \omega t) \vec{u}_z$.

a- Déterminer en régime permanent, la vitesse $\vec{v}$ d'un électron.

b- Montrer que la loi d'Ohm locale s'écrit encore $\vec{j} = \underline{\sigma}(\omega) \vec{E}$ où la conductivité $\underline{\sigma}(\omega)$ en régime variable est complexe; l'exprimer en fonction de σ_0 , ω , τ . Quelles sont les deux différences importantes avec le cas du régime continu ?

c- Démontrer l'équation différentielle satisfaite par la densité de charge locale $\rho(t)$:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{\omega_p^2}{Q} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \omega_p^2 \rho = 0;$$

à partir des valeurs numériques de Q et ω_p , déduire la nature du régime d'amortissement.

AN : Jusqu'à quelle fréquence f_c peut-on utiliser, pour le cuivre, la valeur σ_0 du régime continu sans commettre une erreur supérieure à 1% ? La suite de la partie B concerne le cas $f < f_c$.

d- Montrer qu'alors le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction électrique.

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} F.m^{-1}$$

2- On se propose d'étudier le cas du conducteur cylindrique d'axe Oz et de rayon a .

a- Montrer, en utilisant l'équation de conservation de la charge, que la densité volumique de charges est nulle dans le conducteur en régime sinusoïdal.

b- Déduire des équations de Maxwell l'équation vérifiée par le champ électrique dans le conducteur.

c- Montrer qu'une solution du type: $\vec{E} = E_0 \exp - \left[\frac{(1+i)(a-r)}{\delta} \right] \exp(i\omega t) \vec{u}_x$, convient si $r \gg \delta$, r étant la distance d'un point du conducteur à l'axe et δ une grandeur homogène à une longueur à exprimer en fonction de μ_0 , σ_0 et ω . On donne en coordonnées cylindriques: $\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

d- Interpréter physiquement la solution proposée. Tracer l'amplitude $E(r)$ en fonction de r en admettant que $E(r)$ est négligeable pour r de l'ordre ou inférieur à δ . Quelle signification peut-on donner à δ ?

AN : Expliquer pourquoi un fil de cuivre de 1 mm de diamètre convient à la transmission de la fréquence domestique ($f = 50$ Hz). Ce moyen convient-il à la transmission des fréquences radio ($f \approx 100$ MHz)? Expliquer et justifier le nom d'épaisseur de peau donné à δ dans ce cas. Déterminer l'expression de la résistance $R(\omega)$ dans ces deux cas.

C. Conducteur en très haute fréquence ; Plasmon

1- Le calcul de la conductivité effectué à la question B) reste valable :

$$\underline{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1+i\omega\tau} \quad \text{avec} \quad \sigma_0 = \frac{n e^2 \tau}{m}; \quad \tau \text{ temps caractéristique lié à la dissipation.}$$

a- A partir de quelle fréquence f_c , la conductivité est-elle, en module, réduite en gros d'un facteur 100 par rapport à la conductivité σ_0 en basse fréquence?

b- Quelle est l'expression approchée de $\sigma(\omega)$ pour les hautes fréquences? Calculer la moyenne de la puissance dissipée par effet Joule, Conclure.

b- Dans ces conditions, le courant de déplacement reste-il négligeable devant le courant de conduction?

Introduire une fréquence f_p liée à $\omega_p = \sqrt{n' e^2 / \epsilon_0 m}$.

AN : Calculer pour le cuivre et le sodium le rapport $|\vec{j}_D|/|\vec{j}_C|$ pour la fréquence $f = f_c$.

2- L'étude est reprise sans approximations, pour une fréquence quelconque, mais en notation temporelle réelle (et non en fréquentielle complexe) jusqu'à la question 2b) incluse.

a- Quelle est, à partir de l'équation du mouvement de l'électron, la relation différentielle reliant $\vec{j}$ et $\vec{E}$?

b- A partir de cette relation et à l'aide des équations de Maxwell, éliminer successivement $\vec{j}$, puis $\vec{E}$ et montrer que le champ magnétique $\vec{B}$ vérifie l'équation: $\left(\frac{1}{\tau} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{B} = \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

c- A quelle condition sur k , ω , ω_p , c et τ une onde plane sinusoïdale de champ $\vec{B}(z, t) = \vec{B}_0 \exp j [\omega t - k_1 x]$ peut-elle exister dans le conducteur?

d- Examiner le cas $\omega \ll 1/\tau \ll \omega_p$: exprimer k et caractériser l'onde. Que retrouve-t-on?

e- Examiner le cas $\omega \tau \gg 1$ (avec $\omega \neq \omega_p$): quel est le comportement de l'onde pour $\omega < \omega_p$ et $\omega > \omega_p$? Conclure.

3- Etudions maintenant la propagation d'une onde électromagnétique dans ce métal ($x > 0$; $\omega \tau$ quelconque) et que le champ électrique de l'onde peut s'écrire: $\vec{E}(x, t) = \underline{f}(x) \exp i \omega t \vec{u}_y$ où $\underline{f}(x)$ est une fonction complexe à déterminer.

a- Démontrer l'équation différentielle: $\frac{d^2 \underline{f}(x)}{dx^2} + \underline{k}^2 \underline{f}(x) = 0$ avec $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \underline{n}^2 = k_0^2 (n' - i n'')^2$ avec $n' > 0$.

b- Déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}(x, t)$ et magnétique $\vec{B}(x, t)$ sachant que l'onde se propage dans le sens des x croissants et en posant $\underline{f}(x=0) = E_0$.

d- A quel phénomène physique n'' est lié. Le milieu est-il dispersif?

4- Quel la puissance moyenne $P(x)$ qui traverse une section S perpendiculaire à Ox , située à la cote $x > 0$. Ecrire cette puissance sous la forme $P(x) = P_0 \exp(-\alpha x)$. Que représente le coefficient α .

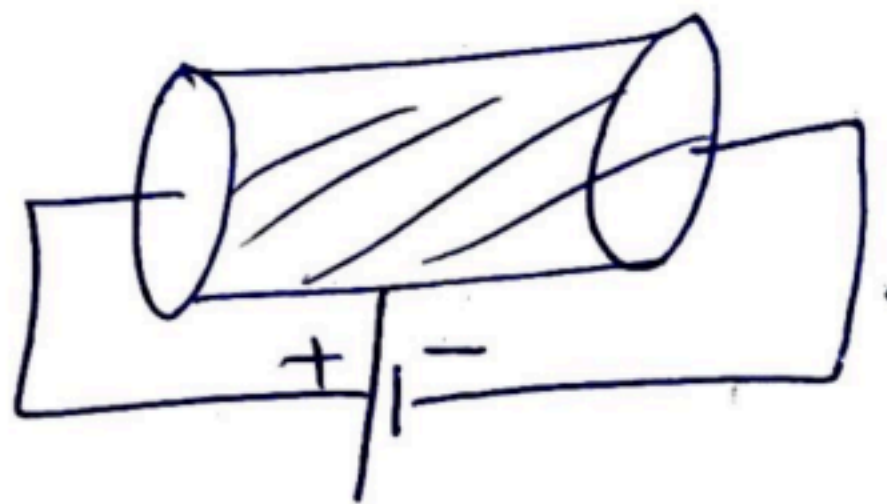
AN : α pour l'aluminium ($\lambda = 1,06 \mu\text{m}$). Commenter.

Series N°3

Prob 1

electrons $m, \vec{v}, n (-e)$

$$\vec{p}_{vis} = -\frac{m}{2} \vec{v}$$



A) Continuum

$$\vec{E} = E_0 \vec{u}_z$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E}_0 - \frac{m}{\tau} \vec{v}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_p(t) + \vec{v}_p = A e^{-t/\tau} - \frac{e\tau}{m} \vec{E}_0$$

$$\lim_{t \gg \tau} \vec{v}(t) = \vec{v}_{limite} = -\left(\frac{e\tau}{m}\right) \vec{E}_0 = -\mu \vec{E}_0$$

$\mu = \text{mobility}$

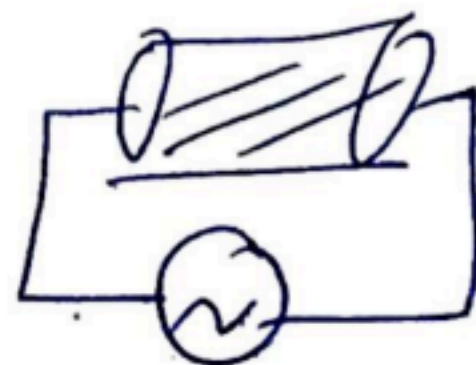
$$\vec{j} = e \vec{v} = -ne \vec{v} = + \frac{ne^2 \tau}{m} \vec{E}_0$$

$$\vec{j} = \sigma_0 \vec{E}_0 \longrightarrow R_0 = \frac{1}{\sigma_0} \frac{L}{S}$$

PT2 2026

B) générateur de B.F

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t} \vec{u}_z$$



1) a) $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau} \vec{v} = -\frac{e}{m} \vec{E}(t)$$

$$(i\omega + \frac{1}{\tau}) \vec{v} = -\frac{e}{m} \vec{E}$$

$$\vec{v} = -\frac{e\tau}{m} \frac{\vec{E}}{1+i\omega\tau}$$

b) $\vec{J} = \frac{ne^2\tau}{m} \frac{\vec{E}}{1+i\omega\tau} = \frac{\sigma}{1+i\omega\tau} \vec{E}$

$$\underline{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1+i\omega\tau}$$

dépend de ω : dispersion
 $\underline{\sigma}$: complexe : retard de phase

c) $\text{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$\vec{J} = \underline{\sigma} \vec{E}$$

$$\frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial t} + \underline{\sigma} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\sigma_0}{(1+i\omega\tau)\epsilon_0} \rho + i\omega \rho = 0$$

$$\left[\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} + i\omega(1+i\omega\tau) \right] \rho = 0$$

$$\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \rho - \omega^2 \tau \rho + i\omega \rho = 0$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \rho = 0$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\omega_p}{Q} \Rightarrow Q = \frac{\omega_p \tau}{2} = \text{facteur de qualité}$$

$$Q \approx 100$$

$$\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \frac{ne^2\tau}{m\epsilon_0} = \omega_p^2$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{\omega_p}{Q} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \omega_p^2 \rho = 0$$

$$r^2 + \frac{\omega_p}{Q} r + \omega_p^2 = 0$$

$$\Delta = \frac{\omega_p^2}{Q^2} - 4\omega_p^2 = \omega_p^2 \left[\frac{1}{Q^2} - 4 \right] < 0$$

$$\approx -4\omega_p^2$$

$$r_1 = -\frac{\omega_p}{2\alpha} + i\gamma$$

pseudo-période

$$r_2 = -\frac{\omega_p}{2\alpha} - i\gamma$$

$$g(t) = g_0 \exp\left(-\frac{\omega_p}{2\alpha} t\right) \cos(\gamma t + \varphi)$$



AN $\gamma = \frac{\gamma_0}{1+i\omega\tau} \approx \gamma_0 \approx 1\%$

$$(\omega\tau) \leq \frac{1}{100} \Rightarrow 2\pi f\tau \leq \frac{1}{100}$$

$$f \leq f_c = \frac{1}{2\pi \times 100\tau} = 85 \text{ GHz}$$

$$f \leq f_c = 85 \mu^3 \text{ Hz}$$

$$\gamma \approx \gamma_0$$

$$d) \frac{\|j_0\|}{\|j_c\|} = \frac{\varepsilon\omega}{\gamma_0} \leq \frac{\varepsilon 2\pi f_c}{\gamma_0} = 10^{-8}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \approx \mu_0 (\gamma_0 \vec{E})$$

$$2a) \quad \sigma \approx \sigma_0 \quad \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\epsilon_0}{\sigma_0} = \tau' = 10^{-18} \text{ s}$$

$$\Downarrow \quad f(t) = f_0 e^{-t/\tau'} \longrightarrow 0$$



$$\text{div } \vec{B} = 0, \text{ M.Flux } \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad \text{grad } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{M.F } \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\oint_{\text{M.A}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (\nabla \cdot \vec{E})$$

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$c) \quad \vec{E} = E_0 \exp\left[-\frac{(1+i)(a-r)}{\delta}\right] e^{i\omega t} \vec{u}_z$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) E(r) e^{i\omega t} = \mu_0 \epsilon_0 E(r) e^{i\omega t}$$

$$\frac{d^2 E(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE(r)}{dr} - i\mu_0 \epsilon_0 \omega E(r) = 0$$

Bessel

$$\frac{dE(r)}{dr} = \frac{(1+i)}{\delta} E(r)$$

$$\frac{d^2 E(r)}{dr^2} = \frac{(1+i)^2}{\delta^2} E(r) = \frac{2i}{\delta^2} E(r)$$

$$\frac{2i}{\delta^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{1+i}{\delta} \right) = \textcircled{i} \mu_0 \sigma_0 \omega$$

$$\frac{2i}{\delta^2} \left[1 + \frac{(1+i)}{\delta r} \frac{\delta^2}{2i} \right] = i \mu_0 \sigma_0 \omega$$

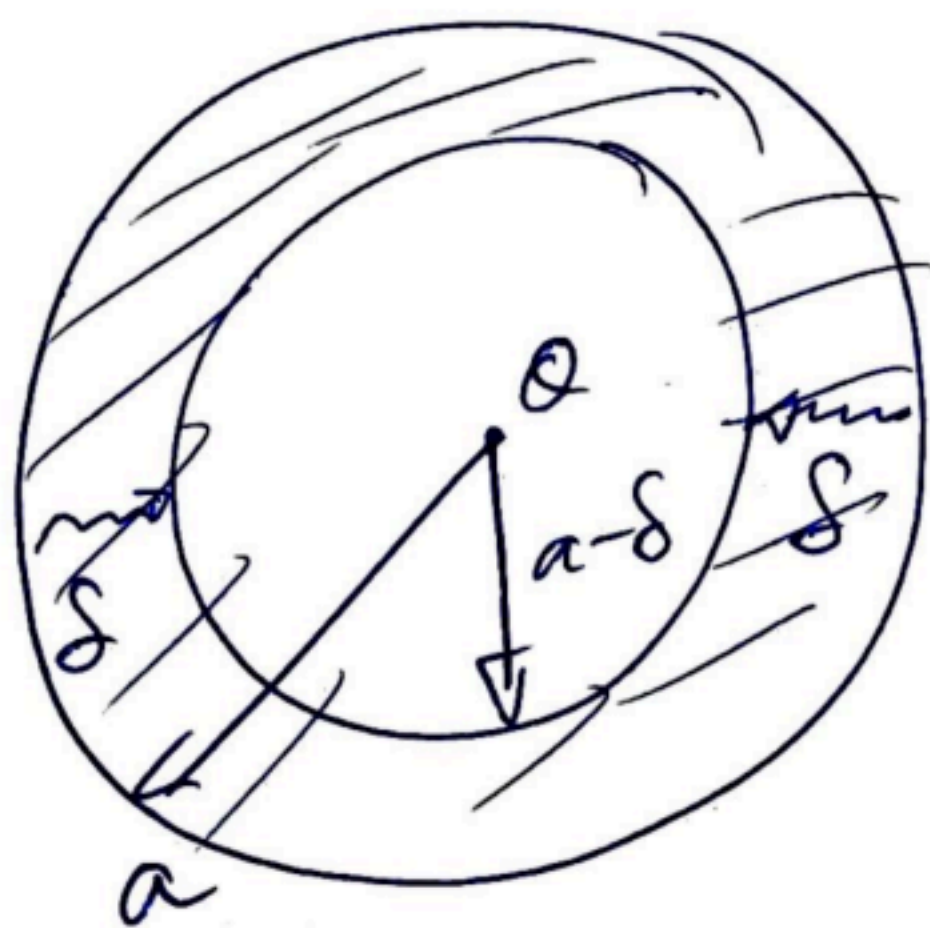
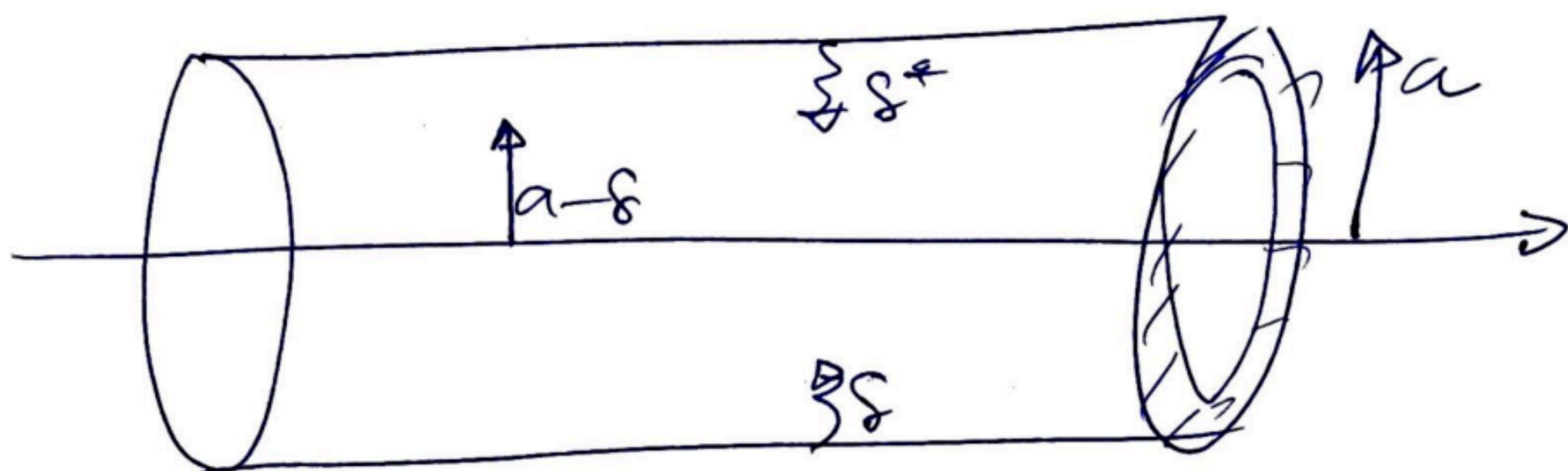
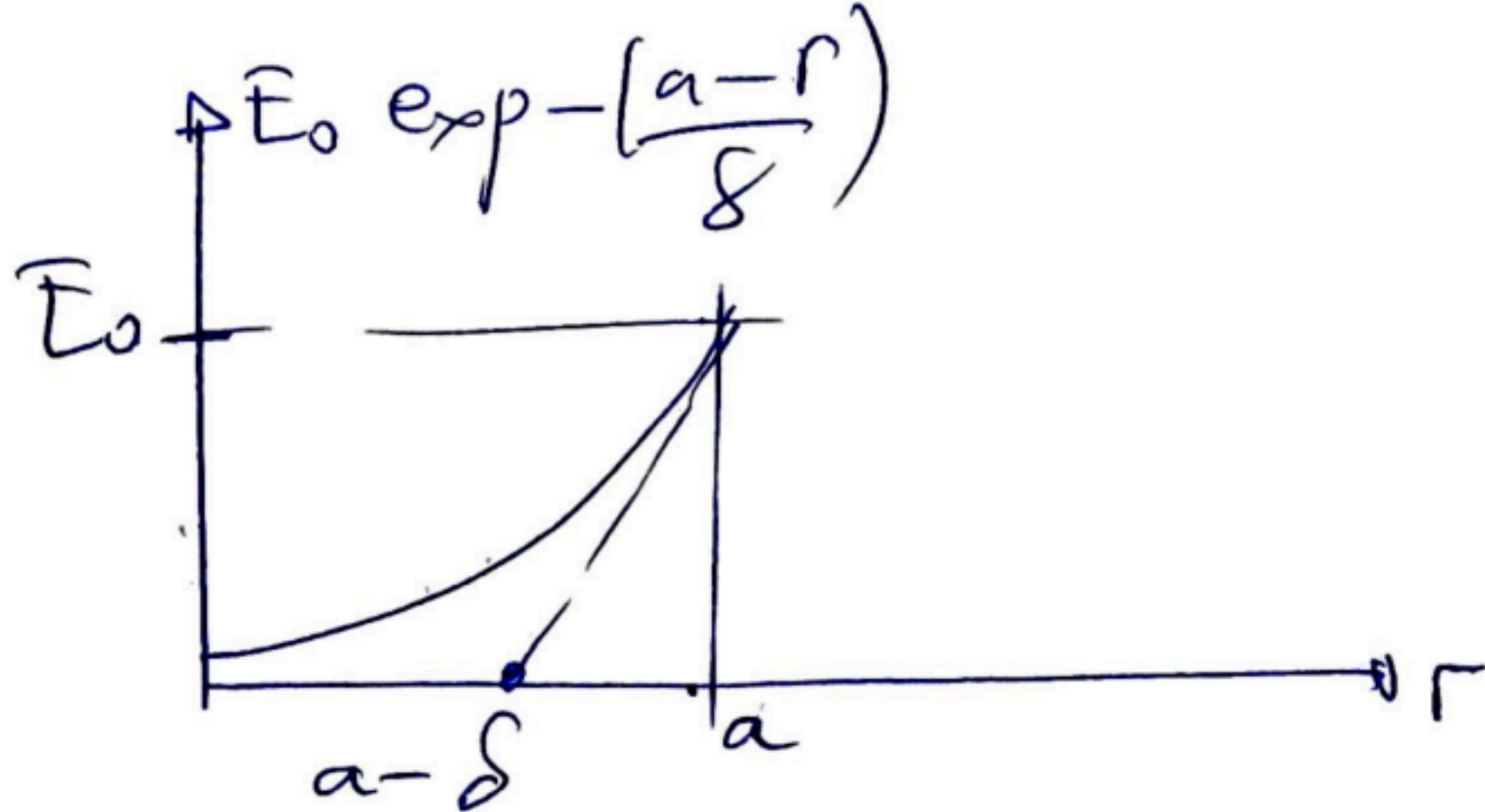
$$\frac{2}{\delta^2} \left[1 + \frac{\delta}{2r} (1 - \textcircled{i}) \right] = \mu_0 \sigma_0 \omega$$

$$\underline{\underline{\delta \ll r}}$$

$$\frac{2}{\delta^2} = \mu_0 \sigma_0 \omega \Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma_0 \omega}}$$

$$d) \underline{\underline{E}} = \left(E_0 \exp \left[-\frac{(a-r)}{\delta} \right] \right) \exp i \left(\omega t - \frac{(a-r)}{\delta} \right) \underline{\underline{u}}_z$$

onde atenuada et progressive gradient
polarisee (oz) (-4r)



$$\delta \ll a$$

$$f = 100 \text{ MHz}$$

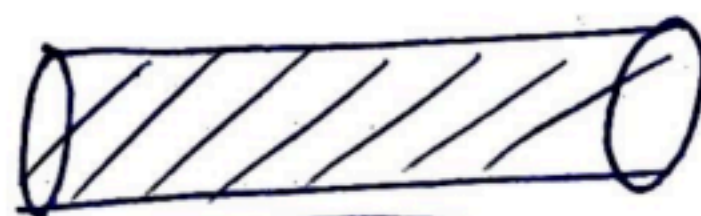
$$\delta \ll a = 0,5 \text{ mm}$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

domestic

$$\delta = 3,3 \text{ mm}$$

$$d = 1 \text{ mm}$$

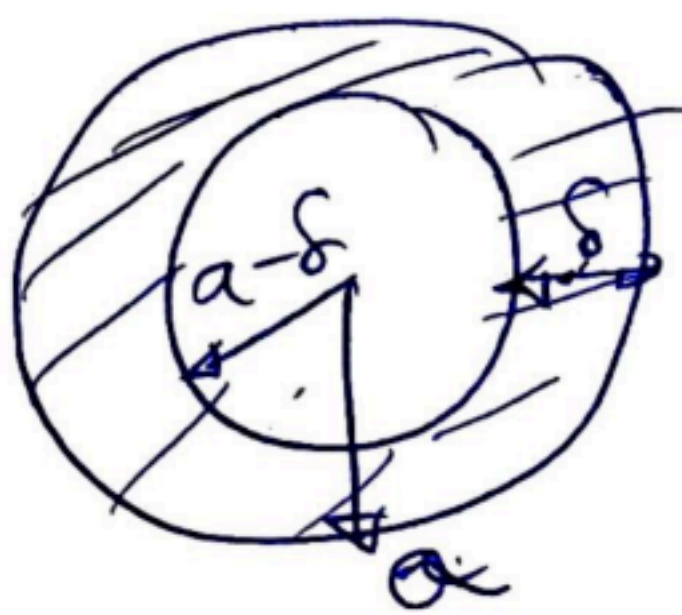


$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma_0 \omega}} = 6 \mu\text{m}$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

$$R_{50 \text{ Hz}} = \frac{1}{\sigma_0} \frac{L}{S} = \frac{1}{\sigma_0} \frac{L}{\pi a^2}$$

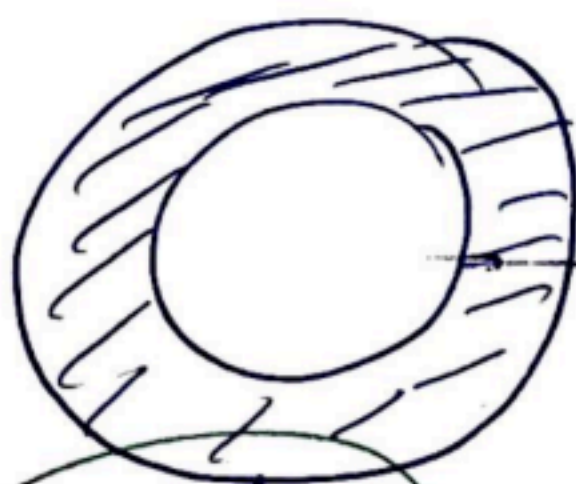
$$f = 100 \text{ MHz}$$



$$R_{100 \text{ MHz}} = \frac{1}{\sigma_0} \frac{L}{2\pi(a - \delta)\delta}$$

$$d^2S = n dr d\vartheta$$

$$\int d^2S = \int n dr d\vartheta$$



$$\int d^2S = (2\pi r) dr$$

$$R_{100 \text{ MHz}} = \frac{1}{\sigma_0} \frac{L}{\pi a^2} \frac{a}{2\delta}$$

$$R_{100 \text{ MHz}} = R_{50 \text{ Hz}} \frac{a}{2\delta}, \quad \delta \ll a$$

$f \rightarrow R(\omega)$
 effet skin: f_{max}