Dr Kchaou borhen

Section MP2-PT2-PC2

Effet Faraday dans un plasma

Un plasma est un gaz ionisé, constitué par des ions positifs (charge $+e$, masse M) et des électrons (charge $-e$, masse m). Ce gaz est "dilué"; ainsi toutes les interactions entre charges sont négligées (elles sont libres en l'absence de tout champ). Le champ de pesanteur est négligé. Le plasma est "froid", c'est-à-dire qu'on ignore toute agitation thermique des particules. En l'absence de champ, il y a N ions et N électrons par unité de volume. Le plasma est à présent plongé dans un champ magnétique uniforme et constant Be parallèle à Oz et dirigé dans le sens de propagation de l'onde ($\overrightarrow{B_c}$ longitudinal).

Le champ électrique de l'onde est toujours de la forme : $\underline{\vec{E}}(z,t)=\underline{\vec{E}}_0 \exp -i(\omega t - kz)$

Avec a priori trois composantes E_x, E_y, E_z et E_0 complexe pour n'inclure aucun type de polarisation.

$\overrightarrow{B_c}$ est suffisamment intense pour en tenir compte dans la force de Lorentz.

Notations : $\omega_c = eB_c / m$; $\omega_p = \sqrt{Ne^2 / \varepsilon_0 m}$

1- a- A l'aide du P.F.D, donner en régime sinusoïdal permanent, les composantes cartésiennes de la vitesse $\underline{\vec{v}}$ des électrons, puis en déduire celle du courant $\underline{\vec{j}}$ en fonction de celles de ε_0, ω_p, ω_c et ω (relation (1)).

b- Une autre méthode ; A l'aide du P.F.D, démontrer la relation **vectorielle** suivante :

$$\vec{j} = \frac{i\,\varepsilon_0\,\omega_p^2}{\left(1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)\omega}\left[\vec{E} + \frac{i\,\omega_c}{\omega}\left(\overrightarrow{u_z}\wedge\vec{E}\right)\right]$$

2-a – A l'aide d'une équation de Maxwell et de la loi de conservation de la charge, calculer la densité volumique de charge ρ et en déduire la composante longitudinale E_z du champ électrique. Justifier ce résultat.

b- Donner dans ce cas une relation vectorielle entre $\underline{\vec{j}}$ et $\underline{\vec{E}}$ à partir des autres équations de Maxwell (Re (2))

3- a- Montrer que la condition de compatibilité des deux systèmes d'équations (1) et (2) amène à l'équation de disperson.

$$\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right)\left(1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) - \frac{\omega_p^2}{c^2}\right]^2 = \left(\frac{\omega_p^2}{c^2}\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2$$

b- Résoudre cette équation et montrer qu'elle admet deux solutions notées k^- et $k^+ > k^-$. A quelles conditions sur ω, les grandeurs k^- et k^+ sont elles réelles.

$$k_+^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1-\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega+\omega_c)}\right] \qquad k_-^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1-\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega-\omega_c)}\right]$$

AN : pour $N = 10^{12}$ électrons/m^3 et $Bc = 10^{-5}$ T.

4- La pulsation ω est telle que les valeurs de k^- et k^+ sont réelles positives.

a- quelles sont les polarisations des ondes planes correspondant aux solutions k^- et k^+ ? Écrire explicitement les champs E^- et E^+ correspondants.

b- une onde de fréquence suffisante arrive sur le plasma en $z = 0$ en étant polarisée rectilignement avec un champ $\underline{\vec{E}}(z=0)$ suivant Ox.

Montrer qu'elle est la superposition de deux ondes du type de celle obtenues à la question **(4-a)**

c- déduire qu'après la distance de propagation $z > 0$, l'onde initiale est toujours polarisée rectilignement, mais que sa direction de polarisation a tourné autour de Oz d'un angle θ; $\theta = \frac{k_+ - k_-}{2} z$

d- on a d'après les valeurs numérique $\omega >> \omega_p$, faire un développement limité de k_+ et $k-$ a l'ordre1 et montrer l'expression suivante : $k_+ - k_- = \frac{\omega_c\,\omega_p^2}{\omega^2\,c}$ (effet Faraday)

AN : calculer θ pour $N = 10^{12}$ électrons/m^3 et $Bc = 10^{-5}$ T. $z = 1$ km, $f = 100$ MHz.

Propagation d'une OPPM dans un diélectrique en présence de B

Dans tout le problème, l'espace sera rapporté à un repère cartésien de base orthonormé directe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. On considère un milieu diélectrique linéaire, homogène, isotrope, de permittivité électrique ε et de permittivité magnétique μ_0. Du point de vue macroscopique, ce milieu est dépourvu de charges et de courants libres.

Partie I : Le milieu est soumis à l'action d'une onde électromagnétique plane sinusoïdale, de pulsation ω et de vecteur d'onde k. Le champ électrique associé à cette onde s'écrit : $\vec{E}(M) = \vec{E}_0 \exp j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})$ avec $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

L'équation de mouvement d'un électron de masse m, de charge (-e) de pulsation propre ω_0 s'écrit : $m\ \vec{\ddot{s}} = -m\ \omega_0^2\ \vec{s} - e\ \vec{E}$

1- Interpréter chaque terme de l'équation du mouvement et justifier les approximations utilisées :

2- a- Donner la solution de l'équation de mouvement en régime forcé.

b- Déduire le vecteur de polarisation $\vec{P} = N\ \vec{p}$ du milieu. On désigne par **N** le nombre d'électron par unité de volume. $\vec{p}$ moment dipolaire de l'atome.

c- Déterminer la susceptibilité électrique $\chi(\omega)$ et la permittivité relative $\varepsilon_r(\omega)$ du milieu, sachant qu'on peut écrire $\vec{P} = \varepsilon_0\ \chi(\omega)\ \vec{E} = \varepsilon_0\ [\varepsilon_r - 1]\ \vec{E}$

d- Que devient $\varepsilon_r(\omega)$ quand ω tend vers ω_0 ? Comment doit-on modifier le modèle pour obtenir un résultat physiquement acceptable au voisinage de ω_0.

3- a- Ecrire les équations de Maxwell dans le milieu diélectrique.

b- Déduire l'équation de dispersion **k** (ω).

c- Pour quelles pulsations l'onde peut-elle se propager dans le milieu diélectrique ?

4- Déterminer la vitesse de phase v_φ de l'onde dans un tel milieu en fonction de ε_r et c

Dans le cas d'une onde lumineuse, définir l'indice de réfraction **n** en fonction de v_φ puis en fonction de ε_r, et enfin en fonction de ω_p, ω_0 et ω

Dans le but de simplifier les calculs dans tout ce qui suit os se placera dorénavant dans le cas particulier où $\omega_p = \omega_0$.

5- Montrer que lorsque ω est très inférieur à ω_0, une approximation au premier ordre conduit à écrire l'indice de réfraction sous la forme : $n(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2}$.

a. Qu'appelle ton la relation obtenue ? quel phénomène physique cette relation met en évidence ?

b. Calculer la valeur numérique de ω_p et celle des coefficient a et b, dans le cas d'un verre où $N = 3{,}2\ 10^{28}$ électrons $/m^3$ et $\varepsilon_0 = 8{,}84\ 10^{-12}\ F.m^{-1}$.

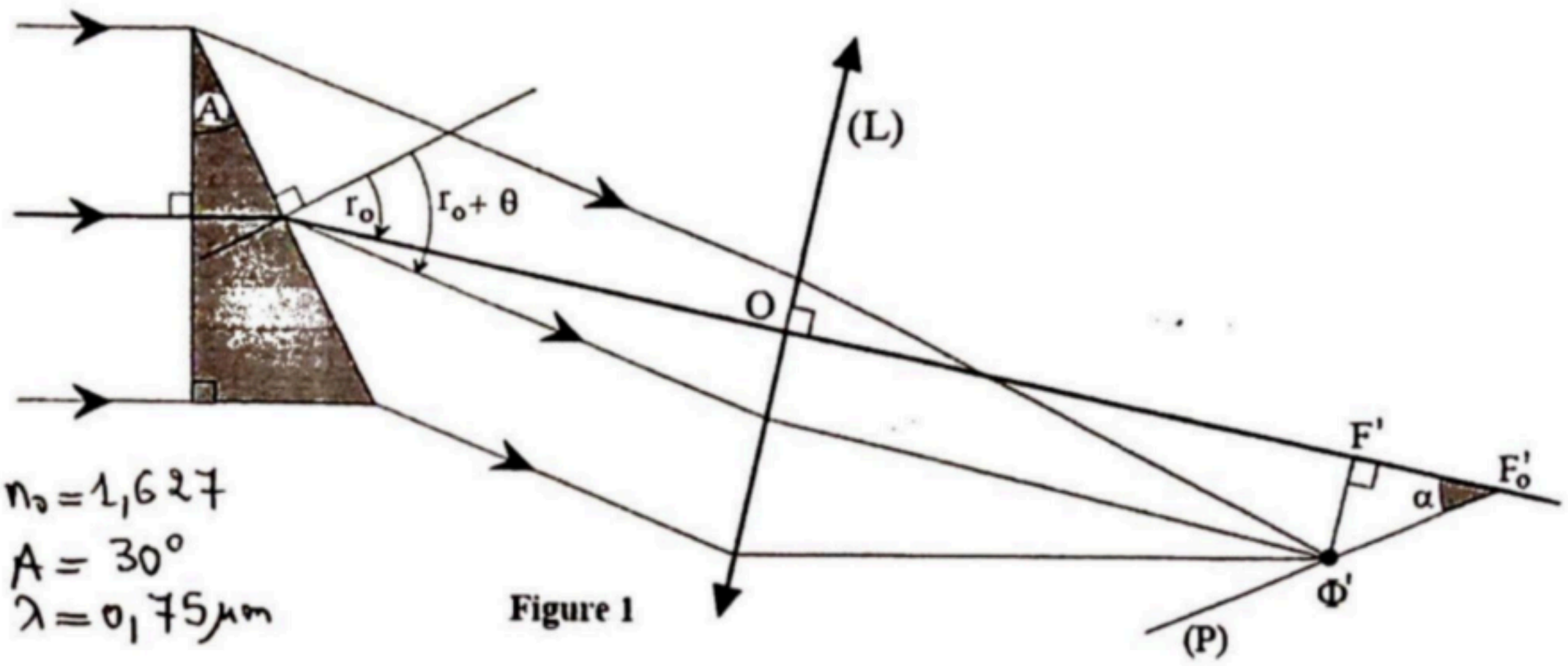
c. Expliquer pourquoi lors de la réfraction, un faisceau de lumière poly-chromatique se décompose en plusieurs faisceaux de lumière monochromatique.

6- Afin d'illustrer ce phénomène, on éclaire un prisme d'angle **A** et d'indice **n** dépendant de la longueur d'onde λ en lumière blanche parallèle tombant perpendiculairement à sa face d'entrée. Pour une la longueur d'onde λ_0; l'indice correspondant étant nommé n_0 on interpose le faisceau émergent du prisme avec une lentille mince (L) perpendiculaire à ce faisceau lequel converge alors vers le foyer image F'. L'angle de réfraction de ce faisceau en sortie du prisme sera nommée r_e.

Pour <u>*toute autre longueur*</u> d'onde λ le faisceau qui émerge du prisme, <u>*réfracte*</u> sous un angle $r_0 + \theta$ par rapport à l'axe de la lentille, un très petit écart angulaire θ et convergera vers un foyer image secondaire Φ' voisin du foyer image principal F' correspondant à l'indice n(λ).

a- Exprimer : **sin** r_0 en fonction de n_0 et de **A**

b- Sachant que $\theta << r_0$; faire un développement limité de $\sin(r_0 + \theta)$ au premier ordre en θ , puis exprimer θ en fonction de **n**, n_0 et **A**



$n_0 = 1,627$

$A = 30°$

$\lambda = 0,75\mu m$

Figure 1

Partie II : le milieu diélectrique est soumis à un champ magnétique uniforme et indépendant du temps $\vec{B}_0 = B_0\vec{u}_x$ avec B0 > 0.

1- On envoie dans le milieu une onde électromagnétique plane sinusoïdale, de pulsation ω de vecteur d'onde $\vec{k}$ et caractérisé par le champ électrique $\vec{E}_1 = E_0\,[cos(\omega\, t - k_1\, x)\ \vec{u_y} - sin(\omega\, t - k_1\, x)\ \vec{u_z}]$ où E_0 est une constante.

a- Déterminer la polarisation de l'onde.

b- Ecrire l'équation du mouvement d'un électron élastiquement lié.

c- En cherchant $\vec{s}_1$ sous la même forme que $\vec{E}_1$, montrer que $\vec{s}_1$ s'écrit : $\vec{s}_1 = -\frac{e}{m\,(\omega_0^2 - \omega^2 + \Omega\omega)}\,\vec{E}_1$.

d- Déduire la permittivité relative $\varepsilon_{r1}(\omega)$.

e- Pour quelles valeurs de ω, l'onde se propage-t-elle dans le milieu ?

f- Quel est l'effet du champ magnétique $\vec{B}_0$ sur l'indice de réfraction du milieu ?

2- On envoie maintenant dans le milieu une onde électromagnétique plane monochromatique de pulsation ω, de nombre d'onde k_2 et dont le champ électrique s'écrit :

$\vec{E}_2 = E_0\,[cos(\omega\, t - k_2\, x)\ \vec{u_y} + sin(\omega\, t - k_2\, x)\ \vec{u_z}]$

b- Quel est l'état de polarisation de l'onde.

c- Sachant que dans ce cas la solution de l'équation du mouvement s'écrit : $\vec{s}_2 = -\frac{e}{m\,(\omega_0^2 - \omega^2 + \Omega\omega)}\,\vec{E}_2$, déterminer la permittivité diélectrique ε_{r2}

Partie III : le milieu diélectrique occupe la région de l'espace limitée par les plans x = 0 et x = d, et est placé dans le vide. Dans la partie x < 0, se propage l'onde électromagnétique suivante : $\vec{E} = 2\,E_0\ cos\ [\omega t - kx]\ \vec{u_y}$

1- Décrire cette onde incidente sur le diélectrique. Vérifier que $\vec{E}$ peut se décomposer en deux ondes polarisées circulairement.

2- Calculer les composantes du champ électrique pour x compris entre 0 et d (on admettra que le coefficient de transmission sur l'interface x = 0 vaut 1).

3- Montrer que pour certains domaines de pulsations dont on déterminera les limites, l'onde se propageant dans le diélectrique est polarisée rectilignement.

4- Montrer que la direction de polarisation tourne quant x varie **de 0 à d.**

Effet Faraday

$$\vec{E} = \vec{E_0} \exp -i(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \qquad \vec{B_e} = B_c \vec{u}_z$$

$$\underline{E} = \underline{E_0} \exp -i(\omega t - kz)$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - e(\vec{v} \wedge \vec{B_c}) = -i\omega m\vec{v}$$

$$i\omega\vec{v} = +\frac{e}{m}\vec{E} + \frac{e}{m}(\vec{v} \wedge \vec{B_c})$$

$$* \vec{v} \wedge \vec{B_c} = \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_c v_y \\ -B_c v_x \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$i\omega v_x = \frac{e}{m}\underline{E_x} + \frac{eB_c}{m}\underline{v_y} \qquad \frac{eB_c}{m} = \omega_c$$

$$i\omega \underline{v_y} = \frac{e}{m}\underline{E_y} - \frac{eB_c}{m}\underline{v_x}$$

$$i\omega \underline{v_z} = \frac{e}{m}\underline{E_z} \longrightarrow \underline{v_z} = \frac{-ie}{m\omega}\underline{E_z}$$

$$\begin{cases} v_x = -\frac{ie}{m\omega}\underline{E_x} - \frac{i\omega_c}{\omega}v_y \\ v_y = -\frac{ie}{m\omega}\underline{E_y} + \frac{i\omega_c}{\omega}\underline{v_x} \end{cases}$$

$$v_x + \frac{i\omega_c}{\omega} v_y = \frac{-ie}{m\omega} E_x \qquad (1)$$

$$v_y - \frac{i\omega_c}{\omega} v_x = \frac{-ie}{m\omega} E_y \qquad (2)$$

$$(1) + (2)\left(-\frac{i\omega_c}{\omega}\right)$$

$$v_x\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) = \frac{-ie}{m\omega}\left(E_x - \frac{i\omega_c}{\omega} E_y\right)$$

$$v_y\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) = \frac{-ie}{m\omega}\left(E_y + \frac{i\omega_c}{\omega} E_x\right)$$

$$v_z = \frac{-ie}{m\omega} E_z$$

$$\vec{j} = -Ne\vec{v}$$

$$j_x = \frac{i\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega} \frac{E_x - \frac{i\omega_c}{\omega} E_y}{\left(1 - \omega_c^2/\omega^2\right)}$$

$$j_y = \frac{i\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega} \frac{E_y + \frac{i\omega_c}{\omega} E_x}{\left(1 - \omega_c^2/\omega^2\right)}$$

$$j_z = \frac{i\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega} E_z$$

$$[\vec{j}] = [\sigma][\vec{E}]$$

1) b) LC2 2008, LT2: 2008

a) $\operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow i\vec{k}\cdot\vec{j} - i\omega\rho = 0$

$i k j_z = i\omega \rho \Rightarrow$

$$\boxed{\rho = \frac{\varepsilon k}{\omega} \frac{i\varepsilon\omega_p^2}{\omega} E_z}$$

$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = i\vec{k}\cdot\vec{E} = i k E_z$

$$\boxed{\rho = i k \varepsilon E_z} \Rightarrow \rho = 0$$

$\omega \neq \omega_p$

$E_z = 0$

$(\vec{T}\cdot\vec{E})$

b) $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\Delta\vec{E} = \vec{\nabla}\times\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$

$= -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$

$\Delta\vec{E} = +\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

$+k^2\vec{E} = \mu_0(+i\omega)\vec{j} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}$

$$+ i\mu_0\omega \vec{J} = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\vec{E}$$

$$\vec{J}_{(2)} = \frac{+i}{\mu_0\omega}\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\vec{E}$$

3) a)

$$j_x = \frac{i}{\mu_0\omega}\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\underline{E_x} = \frac{i\varepsilon\omega_p^2}{\omega}\,\frac{\underline{E_x} - i\frac{\omega_c}{\omega}\underline{E_y}}{\left(1-\omega_c^2/\omega^2\right)}$$

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\left(1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)\underline{E_x} = \frac{\omega_p^2}{c^2}\left(\underline{E_x} - i\frac{\omega_c}{\omega}\underline{E_y}\right)$$

$$\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\left(1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) - \frac{\omega_p^2}{c^2}\right]\underline{E_x} = \frac{-i\omega_c\omega_p^2}{\omega c^2}\underline{E_y}$$

$$\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\left(1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) - \frac{\omega_p^2}{c^2}\right]\underline{E_y} = \frac{+i\omega_c\omega_p^2}{\omega c^2}\underline{E_x}$$

$$\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\left(1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) - \frac{\omega_p^2}{c^2}\right]^2 = \left(\frac{\omega_c\omega_p^2}{\omega c^2}\right)^2$$

$$\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\left(1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) - \frac{\omega_p^2}{c^2}\right]^2 = \left(\frac{\omega_c\omega_p^2}{\omega c^2}\right)^2$$

$$\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right)\left(1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)-\frac{\omega_p^2}{c^2}\right]=\pm\left(\frac{\omega_c\omega_p^2}{\omega c^2}\right)$$

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right)=\frac{\omega_p^2}{c^2}\frac{\left(1\pm\frac{\omega_c}{\omega}\right)}{1-\omega_c^2/\omega^2}$$

$$k^2=\frac{\omega^2}{c^2}\left[1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\frac{1\pm\frac{\omega_c}{\omega}}{1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}}\right]$$

$\omega_c=\frac{eB}{m}=$ pulsation de cyclotron

⊕ $k_-^2=\frac{\omega^2}{c^2}\left[1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\frac{1}{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)}\right]$

⊖ $k_+^2=\frac{\omega^2}{c^2}\left[1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\frac{1}{\left(1+\frac{\omega_c}{\omega}\right)}\right]$

$k_+^2>0$ et $k_-^2>0$

$k_+=\frac{\omega}{c}n_+$; $k_-=\frac{\omega}{c}n_-$

4) $\vec{E}_+ = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k^+ z)}$

$\vec{E}^- = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - k^- z)}$

Ω

$$\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_+^2\right)\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) - \frac{\omega_p^2}{c^2}\right] E_y^+ = i\left(\frac{\omega_c \omega_p^2}{\omega c^2}\right) E_x^+$$

$$-\left(\frac{\omega_c \omega_p^2}{\omega c^2}\right) E_y^+ = i\left(\frac{\omega_c \omega_p^2}{\omega c^2}\right) E_x^+$$

$$E_y^+ = -i E_x^+$$

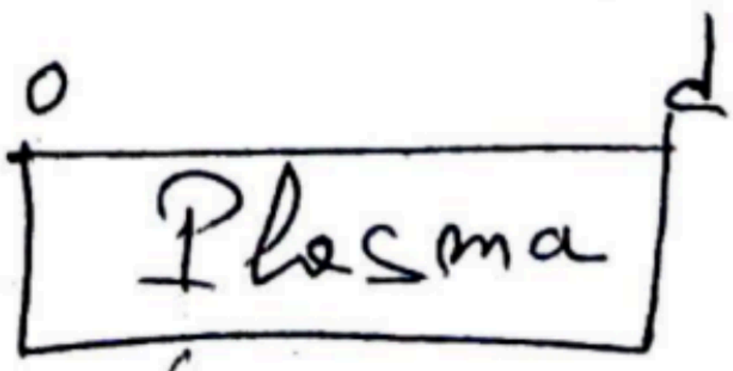
analuire

$$\vec{E}^+ = E_0 e^{i(k^+ z - \omega t)} \begin{vmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{E}^- = E_0 e^{i(k^- z - \omega t)} \begin{vmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{vmatrix}$$

b) $\vec{E}_i = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \vec{u}_x$

$\vec{E}_s = ??$



$$\vec{E}_i = \frac{E_0}{2}\begin{vmatrix} e^{i(kz-\omega t)} \\ -i\,e^{i(kz-\omega t)} \\ 0 \end{vmatrix} + \frac{E_0}{2}\begin{vmatrix} e^{i(kz-\omega t)} \\ +i\,e^{i(kz-\omega t)} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$\downarrow k^+$ $\qquad$ $z<0$ $\qquad$ $\downarrow k^-$

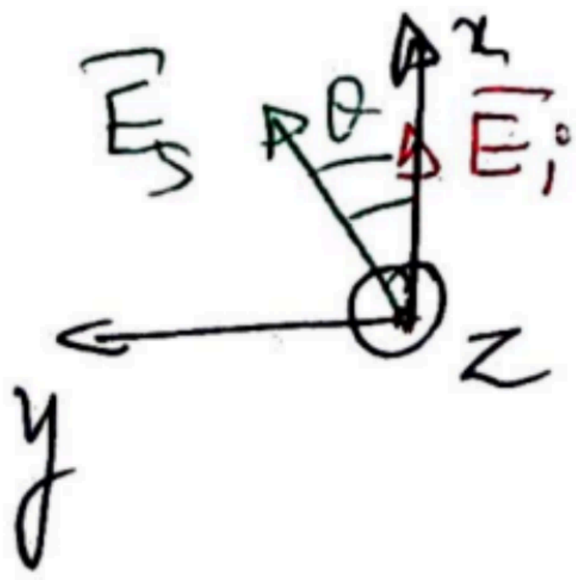
Si $z \in [0, d]$

$$\vec{E}_{trans} = \frac{E_0}{2} e^{-i\omega t} \begin{vmatrix} e^{ik^+z} + e^{ik^-z} \\ -i\left(e^{ik^+z} - e^{ik^-z}\right) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\frac{E_y}{E_x} = -i\,\frac{e^{ik^+z} - e^{ik^-z}}{e^{ik^+z} + e^{ik^-z}}$$

$$= -tg\left[\left(\frac{k^+ - k^-}{2}\right)z\right] = tg\,\theta$$

pouvoir rotatoire



Dielectrique



$$\vec{E} = \vec{E_0} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

$$\vec{f_{rappel}} = - m\omega_0^2 \vec{S}$$

$$m\ddot{\vec{S}} = -e\vec{E} - m\omega_0^2 \vec{S}$$

accél ; félect ; Rappel

$$m\|\vec{\gamma}\| \; ; \quad \|\vec{F}_{vis}\| = \left\| -\frac{m}{\tau}\vec{v} \right\| \; ; \quad \|\vec{F}_{mvt}\| \quad N \ll c$$

$$-m\omega^2 \underline{\vec{S}} = -e\underline{\vec{E}} - m\omega_0^2 \vec{S}$$

$$\vec{S} = -\frac{e}{m} \frac{\vec{E}(t)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{i\omega}{\tau}}$$

$$\vec{p} = -e\vec{S} \; ; \quad \underline{\vec{P}} = N\vec{p} \quad \text{fluide}$$

$$\underline{\vec{P}} = +\frac{e^2 N}{m\varepsilon_0} \frac{\varepsilon_0 \vec{E}}{(\omega_0^2 - \omega^2)} = \varepsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}$$

$$\chi(\omega) = \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)} = \varepsilon_r(\omega) - 1$$

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$\therefore$

$\lim_{\omega \to \omega_0} \varepsilon_r(\omega) = \infty$: diverge

on corrige le modèle $\vec{F}_{frs} \neq 0$

Rq : $\underline{\vec{j}} = -Ne\,\underline{\vec{v}} = -Ne\,\underline{\dot{\vec{s}}}$

$$\underline{\dot{\vec{s}}} = -\frac{e}{m} \frac{i\omega\,\underline{\vec{E}}}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$\vec{j} = +\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{i\omega\varepsilon_0\,\vec{E}}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$\vec{j} = \frac{i\,\varepsilon_0\,\omega_p^2\,\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}\,\vec{E}$$

3) $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left[\varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$. $\vec{J} = 0$

$\rho = 0$.

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right]$$

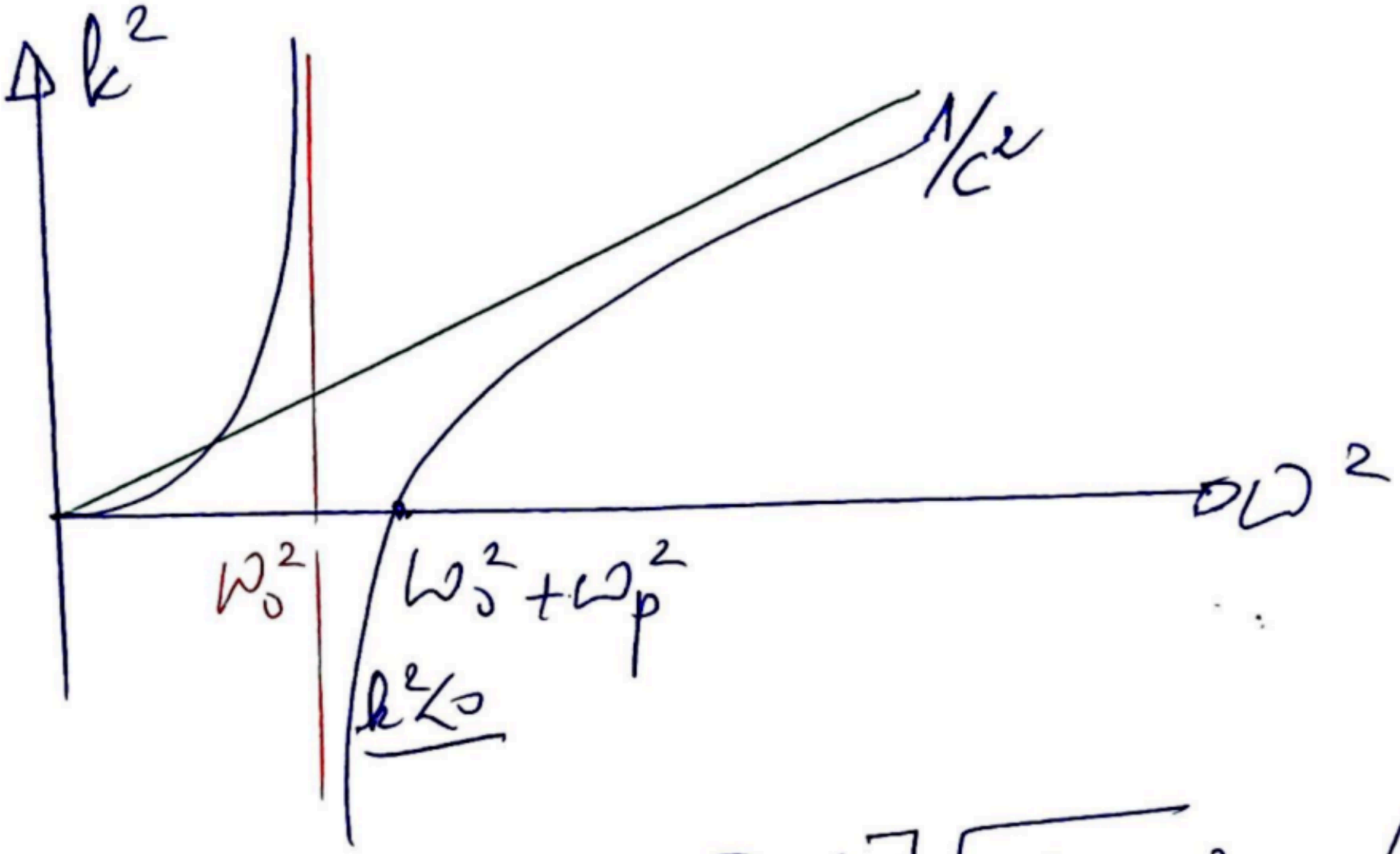
Eq.: $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left[\vec{J}_c + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \underline{\sigma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

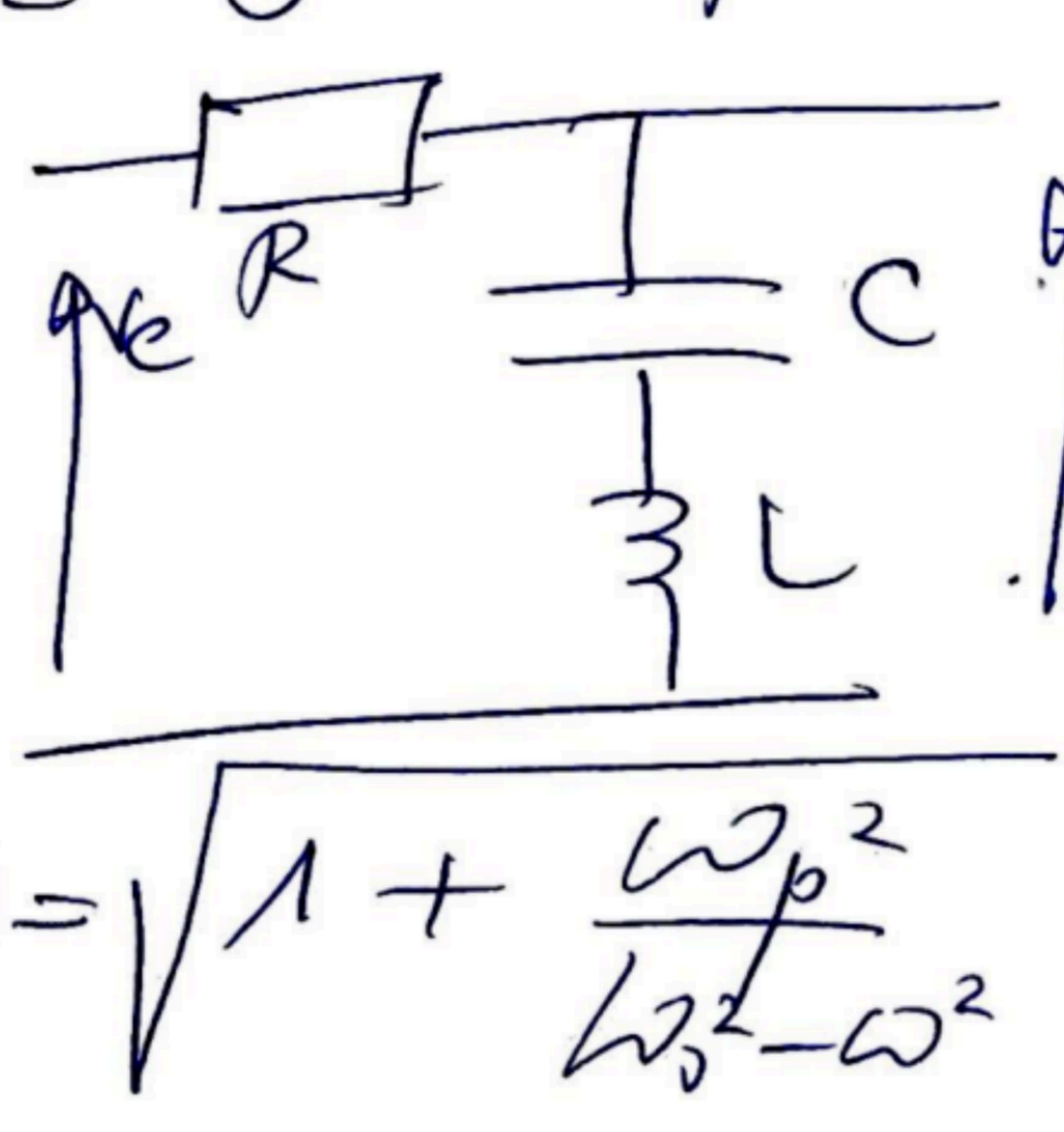
$$\left[-k^2 - \mu_0 \underline{\sigma} i\omega + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \underline{\vec{E}} = \vec{0}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{i \underline{\sigma}}{\varepsilon_0 \omega} \right]$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right]$$



$k^2>0$ $\omega \in [0, \omega_0[\cup]\sqrt{\omega_0^2+\omega_p^2}, +\infty[$



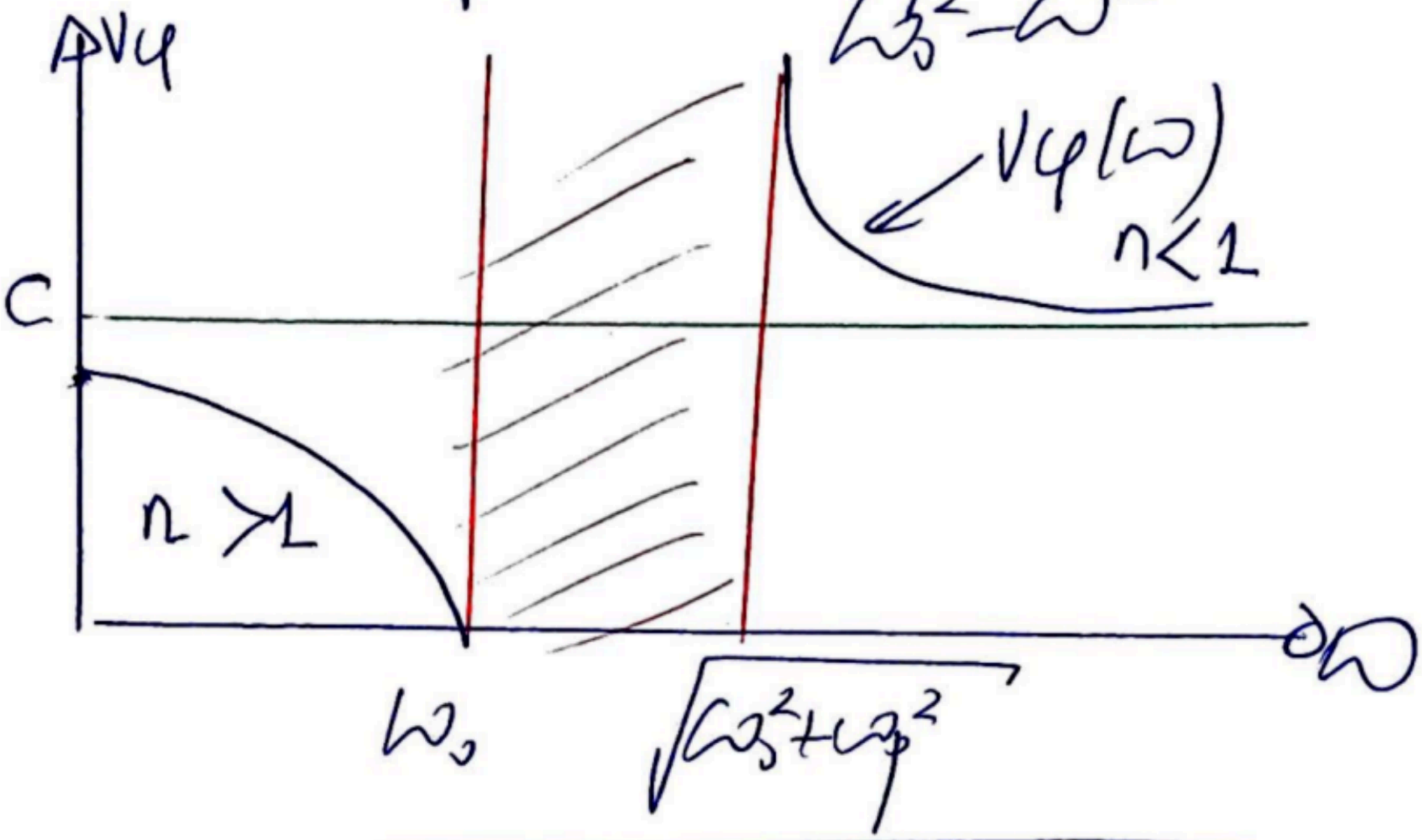
compe — bande

$$k = \frac{\omega}{c} n \Rightarrow n(\omega) = \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

- $\omega < \omega_0 \Rightarrow \omega_0^2 - \omega^2 > 0$; $n > 1$
- $\omega^2 > \omega_0^2 + \omega_p^2 \Rightarrow \omega_0^2 - \omega^2 < -\omega_p^2 < 0$

$n < 1$

4) $$v_\varphi = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}} = \frac{\omega}{k}$$



5) $$n(\omega) = \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

$\omega \ll \omega_0$

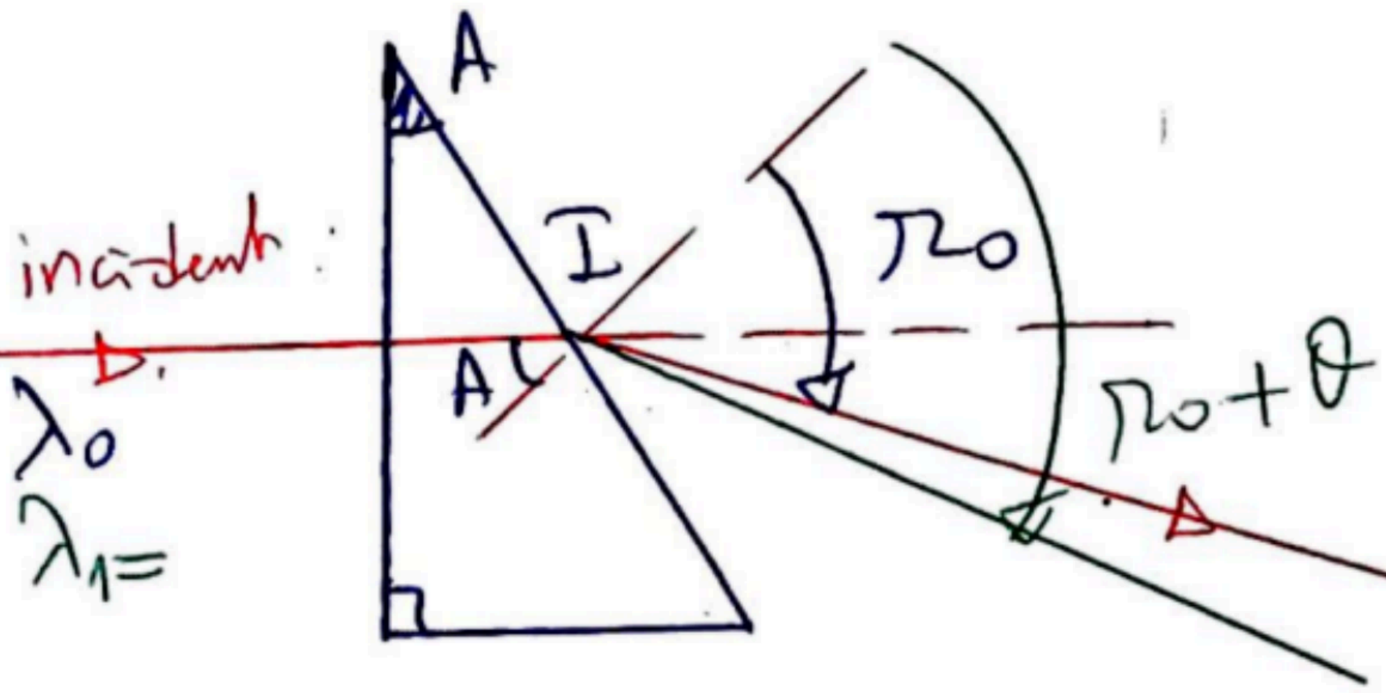
$$n(\omega) = \left[1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]}\right]^{1/2}$$

$$n(\omega) = \left(1 + 1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{2}\left[1 + \frac{\omega^2}{4\omega_0^2}\right]$$

$$n(\lambda) = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{(2\pi c)^2}{\omega_0^2 \lambda^2}$$

$$n(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2}$$



$$n_0 = a + \frac{b}{\lambda_0^2}$$

$$n_1 = a + \frac{b}{\lambda_1^2}$$

$$n_0 \sin A = \sin r_0$$

$$n_1 \sin A = \sin(r_0 + \theta)$$

$$= \sin r_0 \cos\theta + \sin\theta \cos r_0$$

$$n_1 \sin A \simeq \sin r_0 + \theta \cos r_0$$

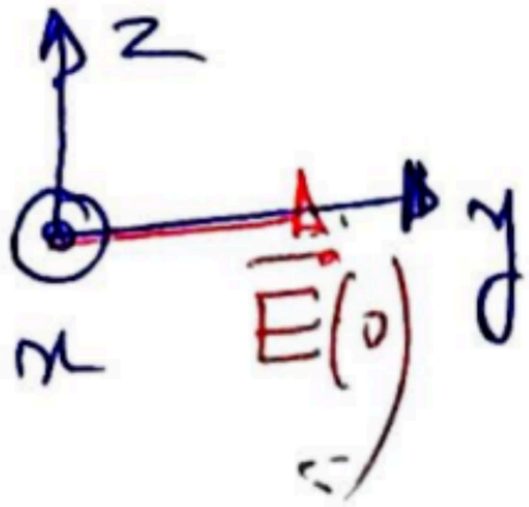
$$\theta = \frac{(n_1 - n_0) \sin A}{\sqrt{1 - n_0^2 \sin^2 A}}$$

Partie II $\quad \vec{B}_{ext} = B_0 \vec{u}_x \parallel \vec{k}_1$

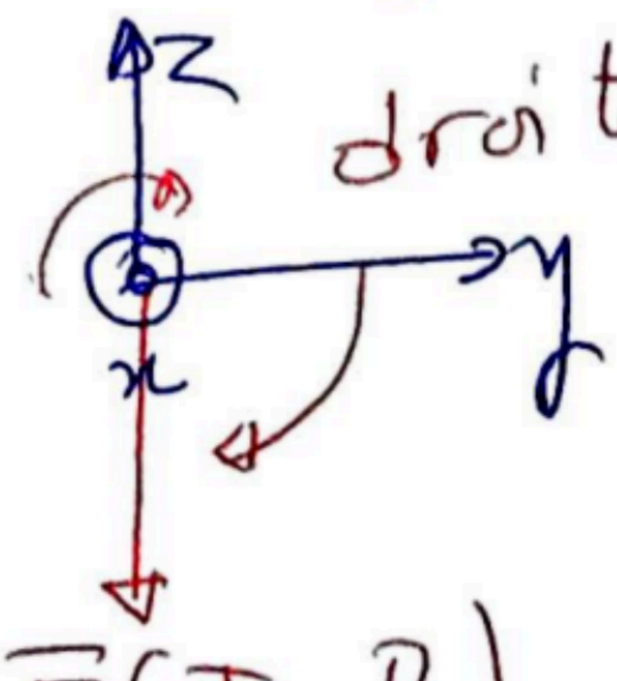
$$\vec{E}_1 = E_0 \left[\cos(\omega t - k_1 x)\, \vec{u}_y - \sin(\omega t - k_1 x)\, \vec{u}_z \right]$$

a) analyse $\quad \left(\frac{E_y}{E_0}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_0}\right)^2 = 1$

- $\left(\vec{E} \wedge \frac{d\vec{E}}{dt}\right) \cdot \vec{k} = -- < 0$ droite .
- $\Phi = \omega t - k_1 x \Rightarrow$
- $\Phi = 0$



$\Phi = \frac{\pi}{2}$



droite

- $\left(\frac{dE_z}{dt}\right)_{\Phi=0} = -E_0 \omega < 0$

0

$\vec{E}_{1CD} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k_1 x)}$ | 1

i

b) $m \ddot{\vec{S}}_1 = -e \vec{E}_1 - m\omega_0^2 \vec{S}_1 - e(\dot{\vec{S}}_1 \wedge \vec{B}_0)$

↓ ?

↓ ?

$$\vec{S_1} = S_0 \left[\cos(\omega t - k_1 x)\, \vec{u}_y - \sin(\omega t - k_1 x)\, \vec{u}_z \right]$$

$$\dot{\vec{S}}_1 = -\omega S_0 \left[\sin(\omega t - k_1 x)\, \vec{u}_y + \cos(\omega t - k_1 x)\, \vec{u}_z \right]$$

$$-e\dot{\vec{S}}_1 \wedge \vec{B}_0 = +eB_0\omega S_0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sin(\;) & 0 \\ \cos(\;) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= eB_0\omega S_0 \begin{vmatrix} 0 \\ \cos(\omega t - k_1 x) \\ -\sin(\omega t - k_1 x) \end{vmatrix}$$

$$\vec{f}_{my} = eB_0\omega \vec{S}_1$$

$$-m\omega^2 \vec{S}_1 = -e\vec{E}_1 - m\omega_0^2 \vec{S}_1 + eB_0\omega \vec{S}_1$$

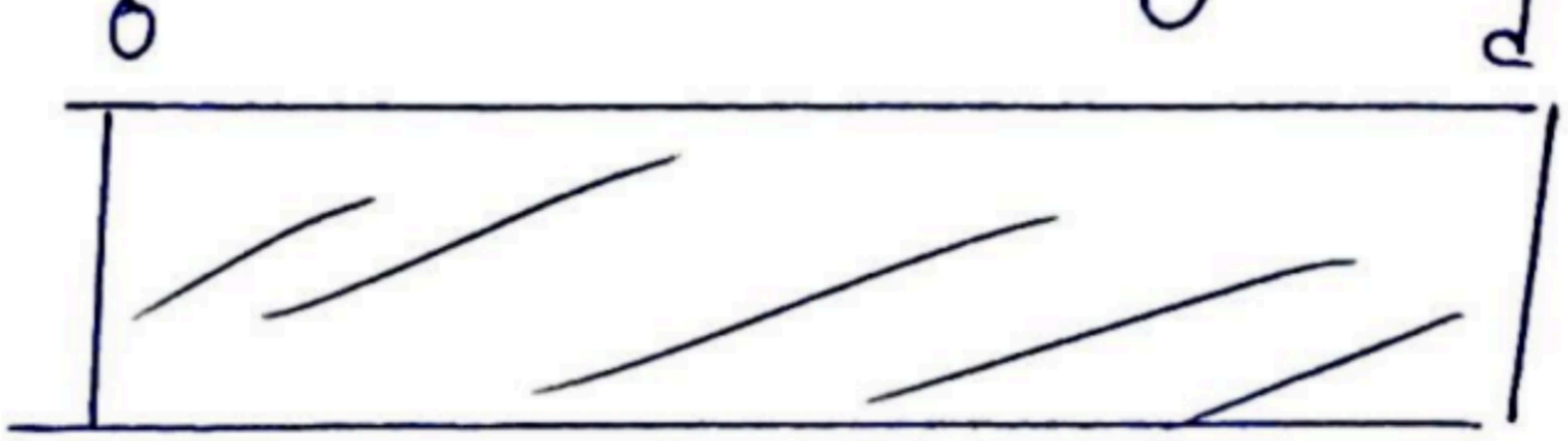
$$\vec{S}_1 = -\frac{e}{m} \frac{\vec{E}_1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - j\gamma\omega}$$

$$\varepsilon_{r1} = 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) - j\gamma\omega}$$

$$\varepsilon_2 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\Gamma\omega}$$

$\overrightarrow{E}_{2CG}$ $\quad k_1 = \frac{\omega}{c} n_1$; $k_2 = \frac{\omega}{c} n_2$

droite $\qquad$ gauche



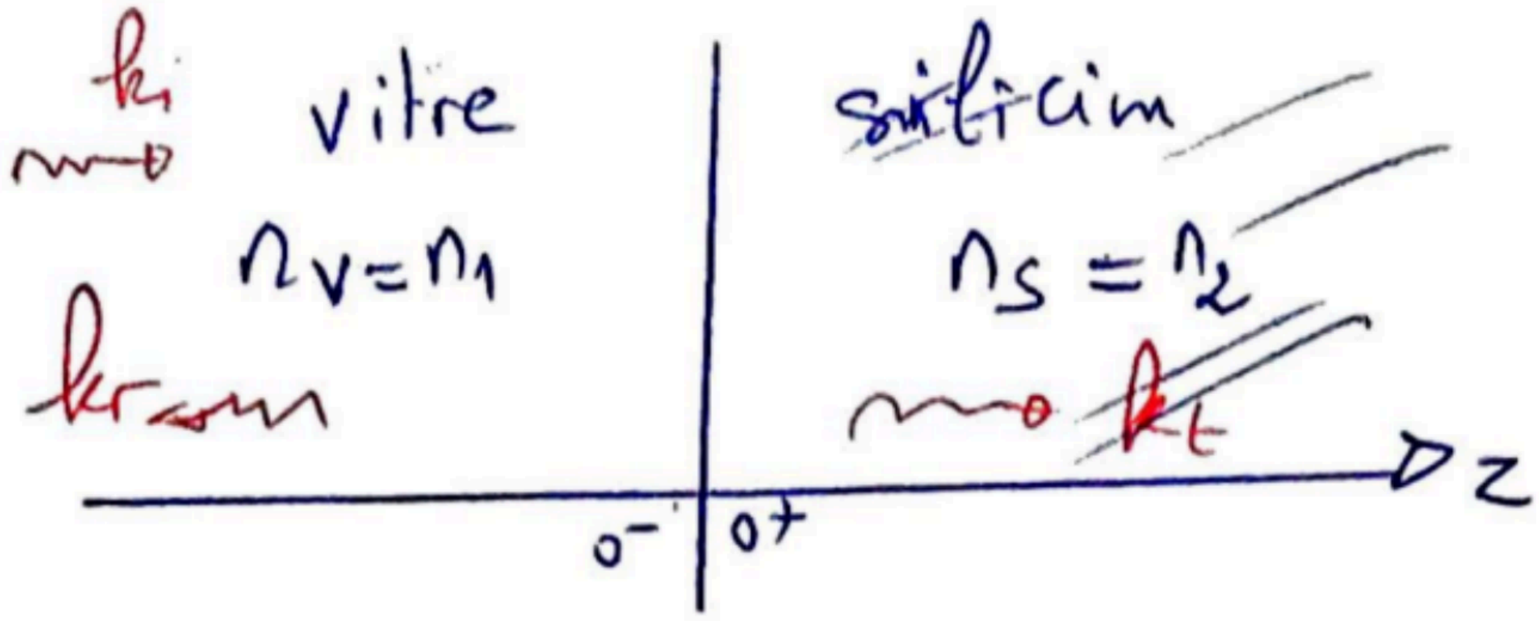
$$\overrightarrow{E_i} = 2E_0 \cos(\omega t - kx)\, \vec{u}_y$$

CD $\qquad$ CG

0 $\quad \alpha x < d$ $\qquad$ 0

$$E_0 \begin{vmatrix} \cos(\omega t - k_1 x) \\ -\sin(\omega t - k_1 x) \end{vmatrix} + E_0 \begin{vmatrix} \cos(\omega t - k_2 x) \\ +\sin(\omega t - k_2 x) \end{vmatrix}$$

$$\frac{E_z}{E_y} = \operatorname{tg}\left[\left(\frac{k_2 - k_1}{2}\right) x\right]$$



$$r_{VS} = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \; ; \quad \underline{k_i} = \frac{\omega}{c} n_V \vec{u}_z \qquad \underline{k_t} = \frac{\omega}{c} n_S \vec{u}_z$$

$$\underline{k_r} = \frac{\omega}{c} n_V (-\vec{u}_z)$$

$$\underline{E_i} + \underline{E_r} = \underline{E_t} \; ; \quad \underline{B_i} + \underline{B_r} = \underline{B_t} \quad (\vec{j}_S = \vec{0})$$

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_S = \vec{0}$$

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{n_V}{c} \vec{u}_z \wedge \vec{E}_{0i} \, e^{i(\omega t - k_i z)}$$

$$\vec{B}_r = -\frac{n_V}{c} \vec{u}_z \wedge \underline{\vec{E}_{0r}} \, e^{i(\omega t + k_r z)}$$

$$\vec{B}_t = \frac{n_S}{c} \vec{u}_z \wedge \underline{\vec{E}_{0t}} \, e^{i(\omega t - k_t z)}$$

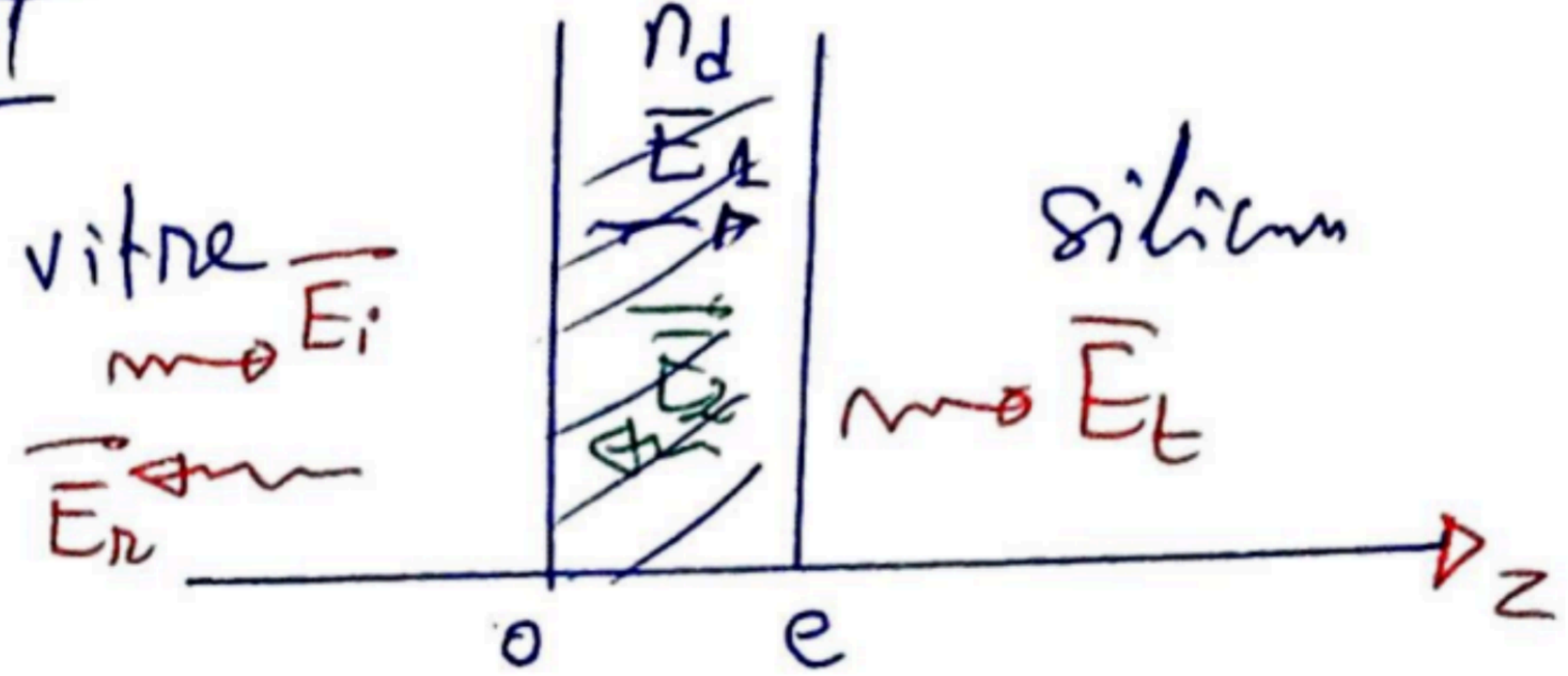
$$\begin{cases} \vec{E}_{0i} + \vec{E}_{0r} = \vec{E}_{0t} \\ (\vec{E}_{0i} - \vec{E}_{0r}) \, n_V = n_S \, \vec{E}_{0t} \end{cases}$$

$$r_{VS} = \frac{n_V - n_S}{n_V + n_S} < 0 \qquad r_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

réflexion vitreuse $\varphi = R$ $\qquad r_{21} = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}$

$$R = \frac{\| \langle \vec{\Gamma}_{Gu} \| \rangle}{\langle \| \vec{\Gamma}_{Ci} \| \rangle} = |\underline{r}|^2 = \left(\frac{n_v - n_s}{n_v + n_s} \right)^2 \simeq 20\%$$

Dépôt



$$\underline{\vec{E}_1} = \underline{\vec{E}_{o1}}\, e^{i(\omega t - k_d z)} \qquad k_d = \frac{\omega}{c} n_d$$

$$\underline{\vec{E}_2} = \underline{\vec{E}_{o2}}\, e^{i(\omega t + k_d z)}$$

$z=0$

$$\begin{cases} \underline{E_{oi}} + \underline{E_{or}} = \underline{E_{o1}} + \underline{E_{o2}} & (1) \\ n_v(\underline{E_{oi}} - \underline{E_{or}}) = n_d(E_{o1} - E_{o2}) & (2) \end{cases}$$

$z=e$

$$\begin{cases} E_{o1} e^{-ik_d e} + E_{o2} e^{ik_d e} = \underline{E_{ot}}\, e^{-ik_s e} & (3) \\ n_d(E_{o1} e^{-ik_d e} - E_{o2} e^{ik_d e}) = \underline{E_{ot}}\, e^{-ik_s e}\, n_s & (4) \end{cases}$$

$\underline{E_{or}} \Rightarrow$

(4) + (3)$(-n_s)$

$$(n_d - n_s) E_{01} e^{-i k_d e} - (n_d + n_s) E_{02} e^{i k_d e} = 0$$

$$E_{02} = E_{01} \left(\frac{n_d - n_s}{n_d + n_s} \right) e^{-i 2 k_d e}$$

$$\begin{cases} E_{0i} + 0 = E_{01} \left(1 + r_{ds} e^{-i\varphi} \right) & (5) \\ E_{0i}\, n_v = n_d E_{01} \left(1 - r_{ds} e^{-i\varphi} \right) & (6) \end{cases}$$

$$\frac{(6)}{(5)} \Rightarrow n_v = n_d \frac{(1-\alpha)}{(1+\alpha)}$$

$$n_v (1+\alpha) = (1-\alpha) n_d$$

$$n_v - n_d = -\alpha (n_d + n_v)$$

$$\alpha = r_{ds} e^{-i\varphi} = \frac{n_d - n_v}{n_d + n_v}$$

$$= \left(\frac{n_d - n_s}{n_d + n_s} \right) e^{-i\varphi} = \left(\frac{n_d - n_v}{n_d + n_v} \right)$$

$\varphi = 2\pi p \qquad e^{-i\varphi} = +1$

$n_{\uparrow\downarrow} = n_s$

$\varphi = 2\pi p + \pi \qquad e^{-i\varphi} = -1$

$n_d = \sqrt{n_s n_r}$
