

FILTRE INTERFERENTIEL

L'onde électromagnétique qui se propage dans le milieu diélectrique linéaire homogène isotrope et transparent est une onde lumineuse. Cette onde est caractérisée par une grandeur scalaire $s(M,t)$ appelée vibration lumineuse correspondant au champ électrique $E(M,t)$. Cette vibration émise par une source S ponctuelle, monochromatique, de pulsation ω et de longueur d'onde λ s'écrit $s(M,t) = a \exp i\omega t$ où a est l'amplitude de la vibration supposée constante.

Le filtre interférentiel (**F**) est une lame mince de verre à faces parallèles d'épaisseur e et d'indice $n = 1,5$, placée dans l'air d'indice $n_0 = 1$. On suppose que n_0 et n ne dépendent pas de la longueur d'onde. Pour un rayon lumineux, de longueur d'onde λ , arrivant sous l'incidence i , cette lame donne par transmission une infinité de rayons émergents (on ne s'intéressera pas aux rayons émergents de la lame par réflexion) (voir figure 1).

Pour diminuer les pertes dans le filtre on augmente le pouvoir réflecteur de la lame de verre en déposant sur chacune de ces faces une mince couche **semi-réfléchissante** non absorbante d'un diélectrique. On notera les coefficients de réflexion r et de transmission t en amplitude du champ électrique : $r_1 = r_{\text{air/verre}}$; $r_2 = r_{\text{verre/air}}$; $t_1 = t_{\text{air/verre}}$; $t_2 = t_{\text{verre/air}}$ et on notera R le coefficient de réflexion en puissance de la surface air/verre traité.

1- Soient a_0 l'amplitude de l'onde incidente et $a_1, a_2, \dots, a_N, \dots$ les amplitudes respectives du 1^{er}, 2^{ème}, ..., $N^{\text{ème}}$, ... rayons transmis. Déterminer les rapports $a_1/a_0, a_2/a_0, \dots$, puis déduire le rapport a_N/a_0 en fonction de r_2, t_1, t_2 et $(N-1)$.

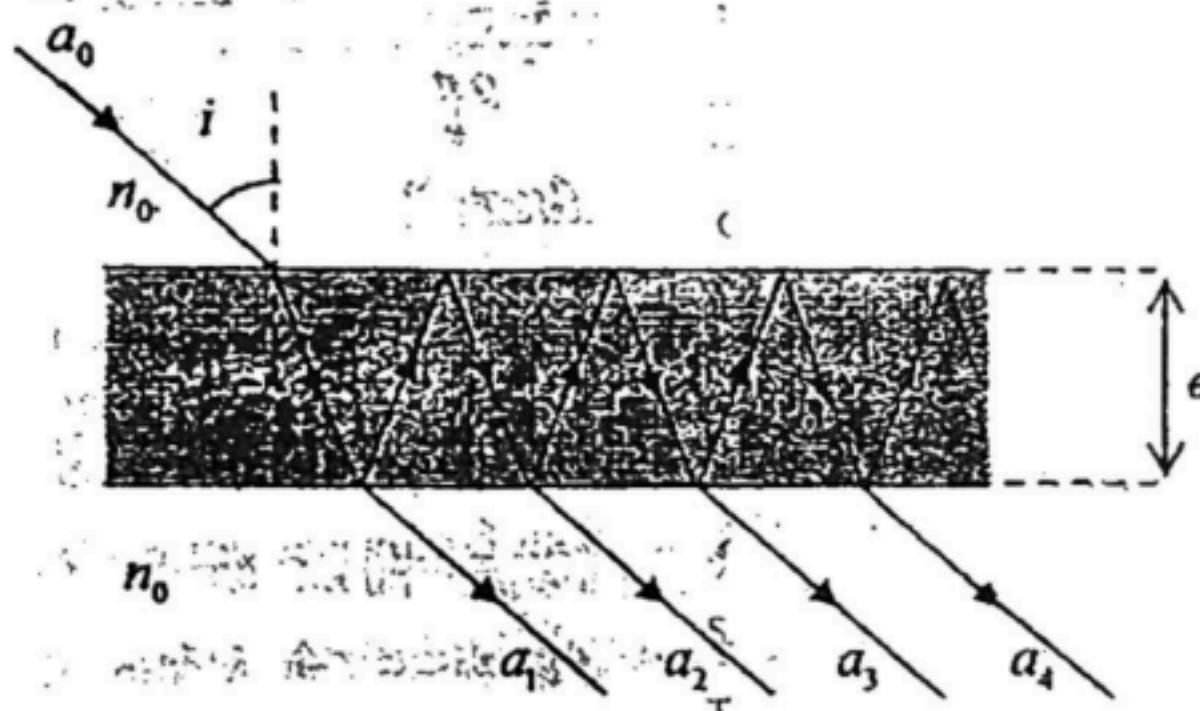


figure 1

2- Déterminer le déphasage ϕ entre deux ondes transmises successives

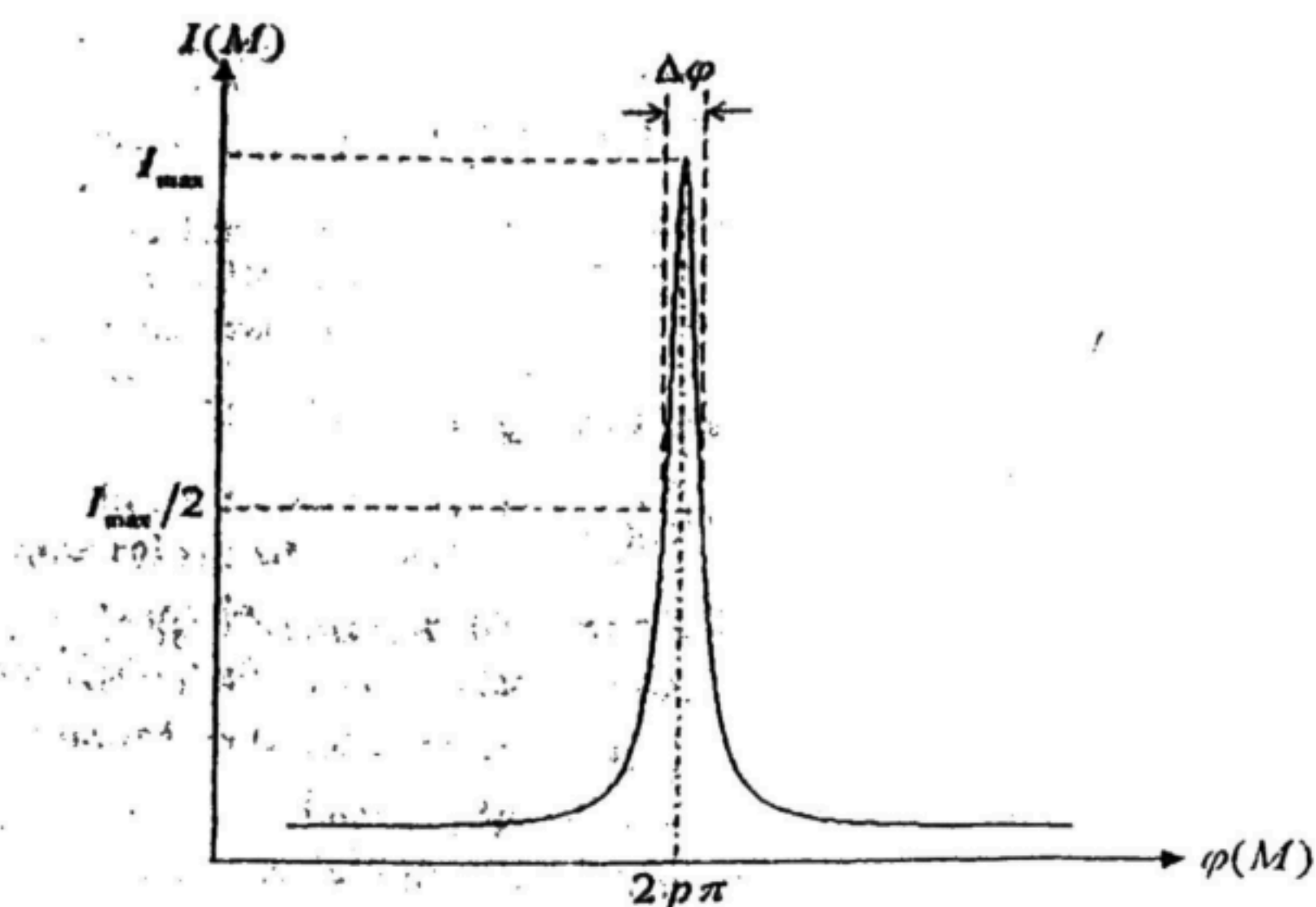
3- Montrer que l'intensité lumineuse associée à l'onde totale transmise par le filtre est de la forme :

$$I(M) = \frac{I_0}{1 + m \sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right)}$$

4- a- Quelle doit être la valeur du coefficient R pour que le contraste défini par : $\gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max}}$ soit égal à 0,95 ? $I_{\max}$ et $I_{\min}$ désignent les intensités transmises respectivement maximale et minimale.

b- On définit la largeur angulaire à mi-hauteur $\Delta\phi$ par l'intervalle à l'intérieur duquel l'intensité transmise $I(M)$ est supérieure ou égale à la moitié de sa valeur maximale (voir figure 2) Sachant que $\Delta\phi$ est faible,

déterminer son expression. En déduire que le pouvoir de résolution du filtre $\mathcal{R} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = p \mathcal{F}$.



5- Le filtre (F) est éclairé en incidence normale par un faisceau parallèle de lumière blanche. L'épaisseur e est choisie de sorte que le filtre (F) transmet un maximum d'intensité pour, la longueur d'onde $\lambda_0 = 546 \text{ nm}$ correspondante à la raie verte du mercure et qu'il atténue tout le reste du spectre du visible dont les longueurs d'ondes sont comprises entre 400 nm et 800 nm.

a- Montrer que les valeurs possibles de l'épaisseur e de la lame de verre sont : $e = \frac{p\lambda_0}{2n}$, avec $p \in \mathbb{N}^*$.

Quelles valeurs de l'épaisseur e doit-on choisir afin qu'il n'y ait qu'une bande passante autour de λ_0 , dans le visible.

b- Quelle est l'influence de l'épaisseur e sur les performances du filtre ?

c- Déterminer la bande passante $\Delta\lambda$ du filtre (F) pour $e = 0,36 \mu\text{m}$. On prendra $R = 0,9$.

Mesure de la bande passante d'un filtre interférentiel

1- Etude de l'interféromètre de Michelson réglé en lame d'air

Un interféromètre de Michelson est plongé dans l'air d'indice égal à 1. Il est constitué de deux miroirs plans M_1 et M_2 perpendiculaires l'un à l'autre et par une lame semi-réfléchissante, non absorbante, appelé séparatrice S_1 , dont les facteurs de transmission et de réflexion valent 1/2, incliné de 45° par rapport à M_1 et M_2 (voir figure 3). On ne tiendra compte, ni des inconvénients liés à l'épaisseur non négligeable de la séparatrice qui sont corrigés grâce à une lame compensatrice, ni des changements de phase par réflexion.

Le miroir M_1 est fixe et on repère la position du miroir mobile M_2 par l'abscisse x du point A_2 . L'origine $x = 0$ correspond au cas où $JA_1 = JA_2$.

On éclaire le dispositif par une source étendue S monochromatique, de nombre d'onde $\sigma_0 = \frac{1}{\lambda_0}$. On

note I_0 l'intensité du rayon lumineux incident issu de la source S .

On place à la sortie du Michelson une lentille mince convergente L d'axe optique (Jy) et de distance focale f .

1-1- Soit un rayon lumineux incident issu de la source S et faisant un angle θ avec l'axe (Jx). Donner l'expression de la différence de marche δ entre les deux ondes qui interfèrent au point P en fonction de x et de θ .

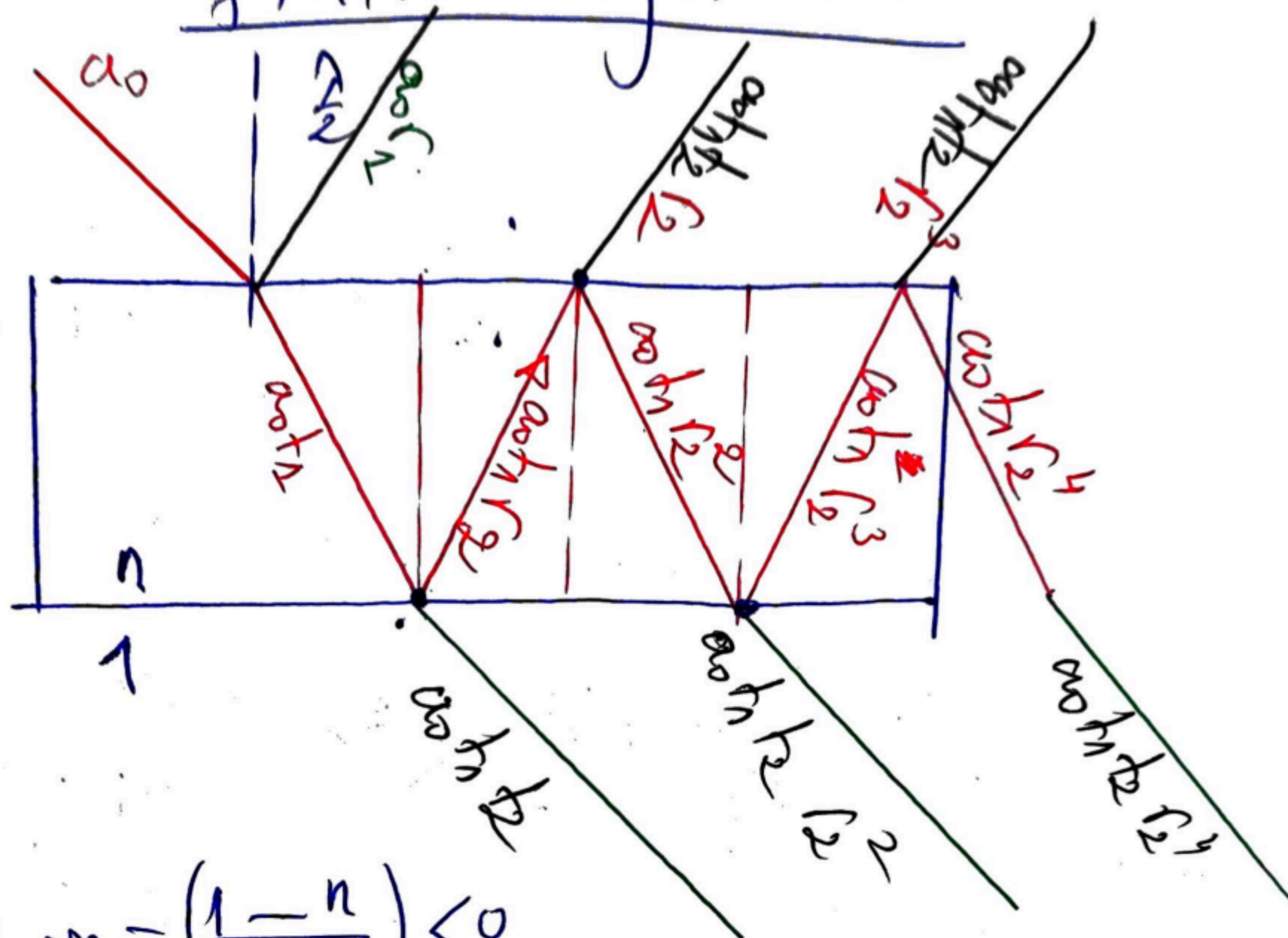
1-2- En se plaçant dans l'approximation de Gauss, exprimer l'intensité lumineuse $I(r)$ au point P en fonction de $r = FP$, f , σ_0 , x et de I_0 .

1-3- Grâce à un moteur électrique, on translate à vitesse uniforme le miroir M_2 . On place au foyer F' de la lentille L un détecteur qui délivre un signal $S_0(x)$ proportionnel à $I(r = 0)$. Montrer que : $S_0(x) = S_{0m} [1 + \cos(4\pi \sigma_0 x)]$. Quelle est la période T_0 de l'interférogramme $S(x)$?

filtre interférentiel

$$r_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

$$t_{12} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$



$$r_1 = r_{\text{air/verre}} = \left(\frac{1-n}{1+n} \right) < 0$$

$$t_1 = t_{\text{air/verre}} = \frac{2}{1+n}$$

$$r_2 = r_{\text{verre/air}} = \left(\frac{n-1}{n+1} \right) > 0$$

$$t_2 = \frac{2n}{1+n}$$

$$R = |r_1|^2 = |r_2|^2$$

$$T = \frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2} = t_1t_2$$

$$a_1(n) = a_0 t_1 t_2 = a_0 T$$

$$a_2(n) = a_0 t_1 t_2 r_2^2 e^{-i\varphi} = a_0 T R e^{-i\varphi}$$

$$a_3(n) = a_0 t_1 t_2 r_2^4 e^{-i2\varphi} = a_0 T R^2 e^{-i2\varphi}$$

$$\underline{a}_N(t) = a_0 T R^{(N-1)} e^{-i(N-1)\varphi}$$

$$\underline{\Delta}(t, t) = \underline{a}(t) e^{i\omega t}$$

$$2) \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \frac{2\pi}{\lambda} (2ne\omega sr)$$

$$3) \underline{a}(t) = \underline{a}_1 + \underline{a}_2 + \underline{a}_3 + \dots \underline{a}_N(t)$$

$$= a_0 T (1 + R e^{-i\varphi} + R^2 e^{-i2\varphi} + \dots R^{(N-1)} e^{-i(N-1)\varphi})$$

$$= a_0 T \left[\frac{1 - R^N e^{-iN\varphi}}{1 - R e^{-i\varphi}} \right]$$

$$\lim_{N \gg 1} R^N e^{-iN\varphi} = 0$$

converge

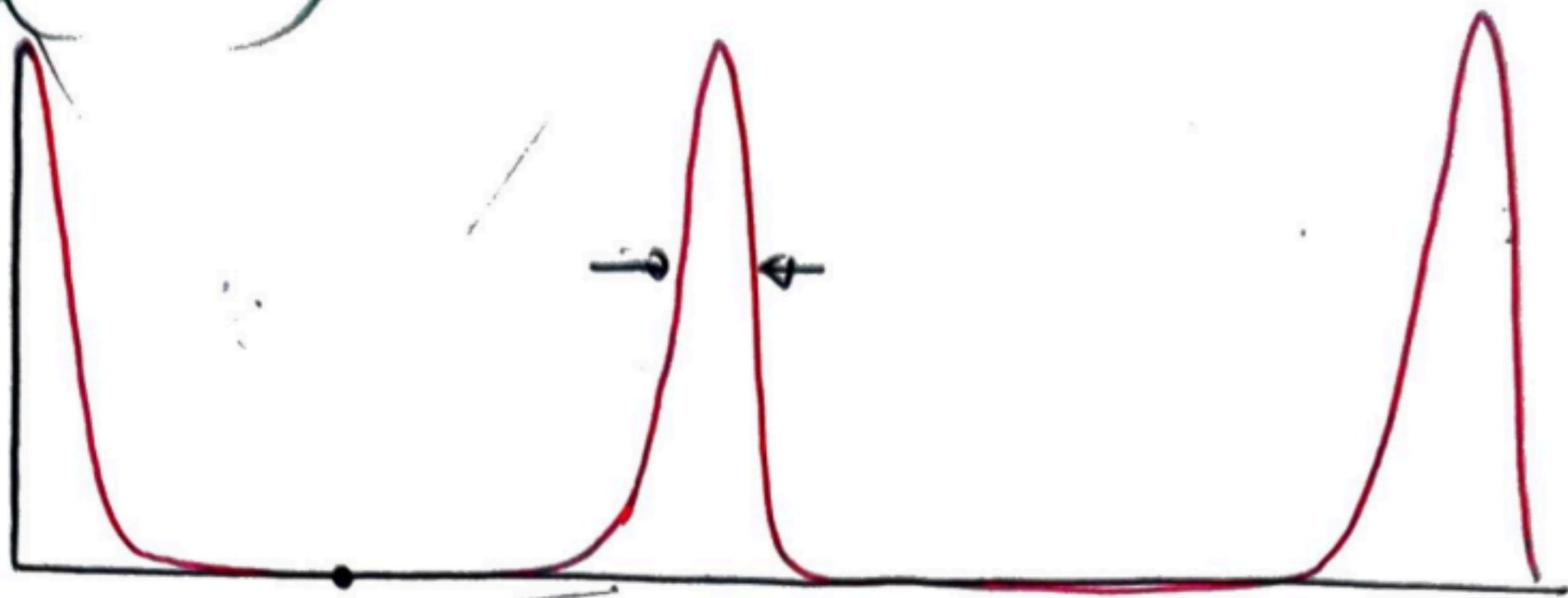
$$\underline{a}(t) = \frac{a_0 T}{(1 - R e^{-i\varphi})}$$

$$\begin{aligned}
 I &= \underline{a(m)} \underline{a^*(m)} \\
 &= \frac{a_0^2 T^2}{(1 - R e^{-i\varphi})(1 - R e^{i\varphi})} \\
 &= \frac{a_0^2 T^2}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi} \\
 &= \frac{1 + R^2 - 2R \left(1 - 2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)}{a_0^2 T^2} \\
 &= \frac{(1 - R)^2 + 4R \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{a_0^2 T^2}
 \end{aligned}$$

$$I(m) = \frac{I_0 (1 - R)^2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2 \varphi / 2}$$

$$|I(m)| = \frac{I_0}{1 + m \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \quad \text{fonction d'Airy}$$

$$m = \frac{4R}{(1-R)^2}$$



4) a) $C = \gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max}}$

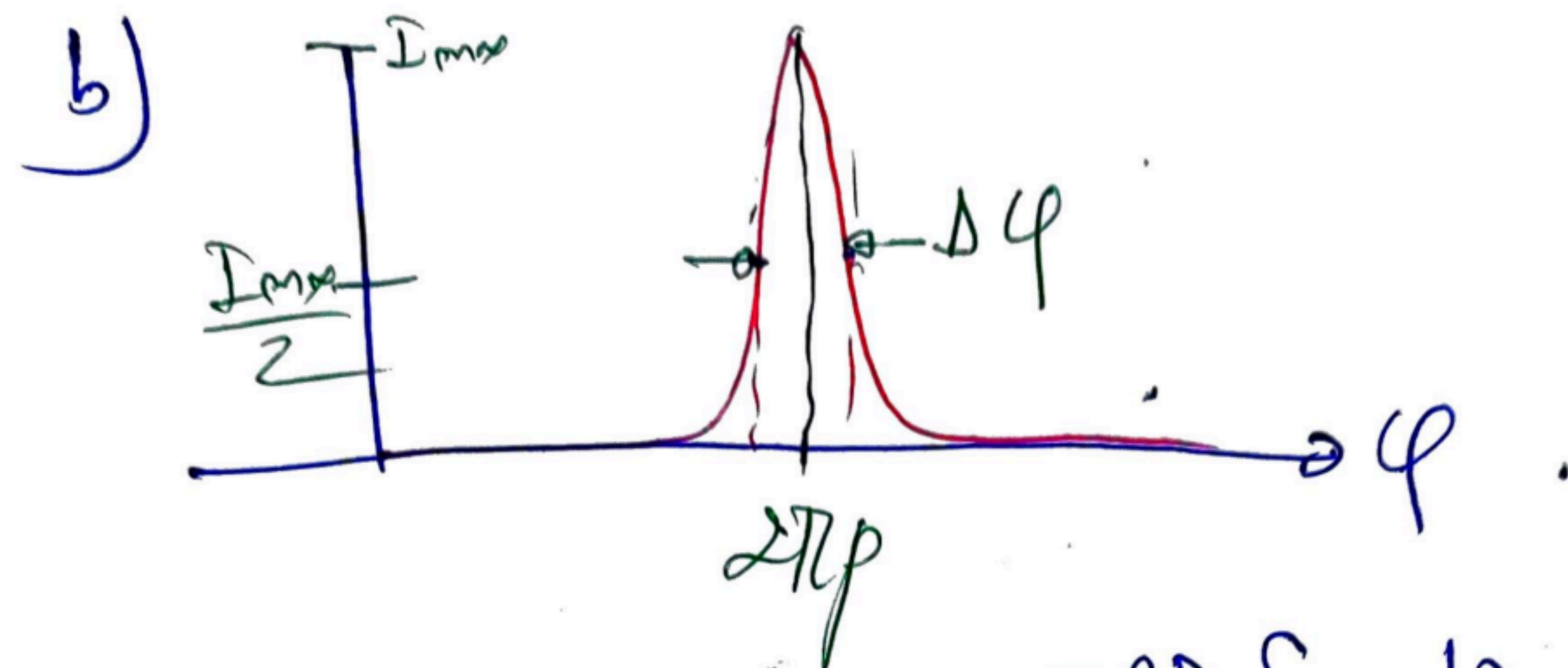
$$I_{\max} = I_0; \quad I_{\min} = \frac{I_0}{1+m}$$

$$\gamma = \frac{I_0 - \frac{I_0}{1+m}}{I_0} = \frac{m}{1+m}$$

$$\gamma = 0,95 \Rightarrow m = \frac{4R}{(1-R)^2}$$

$$R = 0,64, \quad R = \dots > 1$$

حرام



$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta \Rightarrow d\varphi = -\frac{2\pi \delta}{\lambda^2} d\lambda$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi \delta}{\lambda} \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2\pi p \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{2\pi p}{\Delta\varphi}$$

$$I = \frac{I_{\max}}{2} = \frac{I_{\max}}{1 + m \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$m \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 1 \Rightarrow \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{m}$$

$$\varphi = 2\pi p \pm \frac{\Delta\varphi}{2}$$

$$\sin^2\left(\pi p \pm \frac{\Delta\varphi}{4}\right) = \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{4}\right) \approx \left(\frac{\Delta\varphi}{4}\right)^2$$

$$\left(\frac{\Delta \varphi}{4}\right)^2 = \frac{1}{m} \Rightarrow \Delta \varphi = \frac{4}{\sqrt{m}}$$

$$\frac{\lambda}{\Delta \lambda} = \frac{2\pi f}{4} \sqrt{m}$$

$$= \frac{\pi f}{2} \frac{2\sqrt{R}}{(1-R)}$$

$$\frac{\lambda}{\Delta \lambda} = p \left(\frac{\pi \sqrt{R}}{(1-R)} \right) = p f = R$$

$$R = \frac{\lambda}{\Delta \lambda} = p f$$

$$5) \quad S = 2ne = p \lambda_0 \Rightarrow e = \frac{p \lambda_0}{2n}$$

$$p \lambda_0 = p' \lambda', \quad \lambda_v \leq \lambda' = \frac{p \cdot \lambda_0}{p'} \leq \lambda_R$$

$$\frac{p \cdot \lambda_0}{\lambda_R} \leq p' \leq \frac{\lambda_0}{\lambda_v} p$$

$$p=1 \Rightarrow p'=1$$

$$p=2 \Rightarrow p'=2$$

$$p=3 \Rightarrow p' \neq 3$$

$$\rightarrow e_1 = \frac{\lambda_0}{2}$$

$$\rightarrow e_2 = \frac{\lambda_0}{n}$$

$\hookrightarrow e_2 = \text{lameller}$

p'
 R
 (λ)