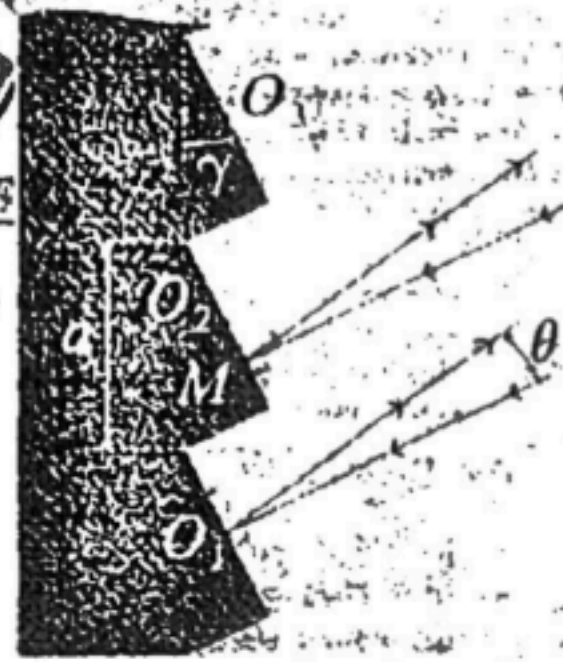


Le réseau échelette

La détection d'exoplanètes de petites dimensions nécessite de pouvoir mesurer la variation de la vitesse radiale d'une étoile avec une grande précision. Le télescope HARPS (High Accuracy Radial Velocity for Planets Research) situé à l'observatoire de La Silla au Chili mesure la vitesse radiale d'une étoile avec une précision de l'ordre de 1 m.s^{-1} ce qui lui a permis en avril 2007 de découvrir la première petite exoplanète nommée GLIESE 581c. Ce télescope utilise un réseau échelette qui permet d'obtenir une très bonne luminosité dans un ordre d'interférence élevé. Ce type de réseau est constitué d'un grand nombre n de petites facettes parfaitement réfléchissantes inclinées d'un angle γ par rapport au plan du réseau et séparées d'une distance a . Chaque facette, de largeur $\ell = a \cos \gamma$, est éclairée en incidence normale par une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ .



On observe l'onde réfléchi « à l'infini » dans la direction θ grâce à une lunette. Les centres des facettes notés O_k pour $k = 1, \dots, n$ sont donc distants de a , on notera M un point quelconque d'une facette. Le dispositif est représenté sur la figure ci-dessus

- 1- On note x la distance entre un point M situé sur la deuxième facette et O_2 . Exprimer, en fonction de x et θ , la différence de marche « à l'infini » $\delta(M, O_2)$ entre les rayons issus des sources secondaires situées en O_2 et en M . De même, exprimer, en fonction de a , γ et θ , la différence de marche « à l'infini » $\delta(O_1, O_2)$ entre les rayons issus de O_1 et O_2 . Le déphasage entre ces deux rayons sera par la suite noté ϕ .
- 2- Exprimer l'amplitude totale de l'onde émise due aux n facettes. En déduire l'intensité totale I observée « à l'infini ». Montrer que celle-ci peut être mise sous la forme : $I = I_0 \sin^2 \left(\frac{\pi a \cos \gamma \sin \theta}{\lambda} \right) F_n(\phi)$

Comment s'interprète physiquement chacun des facteurs intervenant dans l'expression de I .

- 3- Quelle est la période de la fonction réseau $F_n(\phi)$? Tracer l'allure de la fonction $F_n(\phi)$ pour $n \gg 1$.

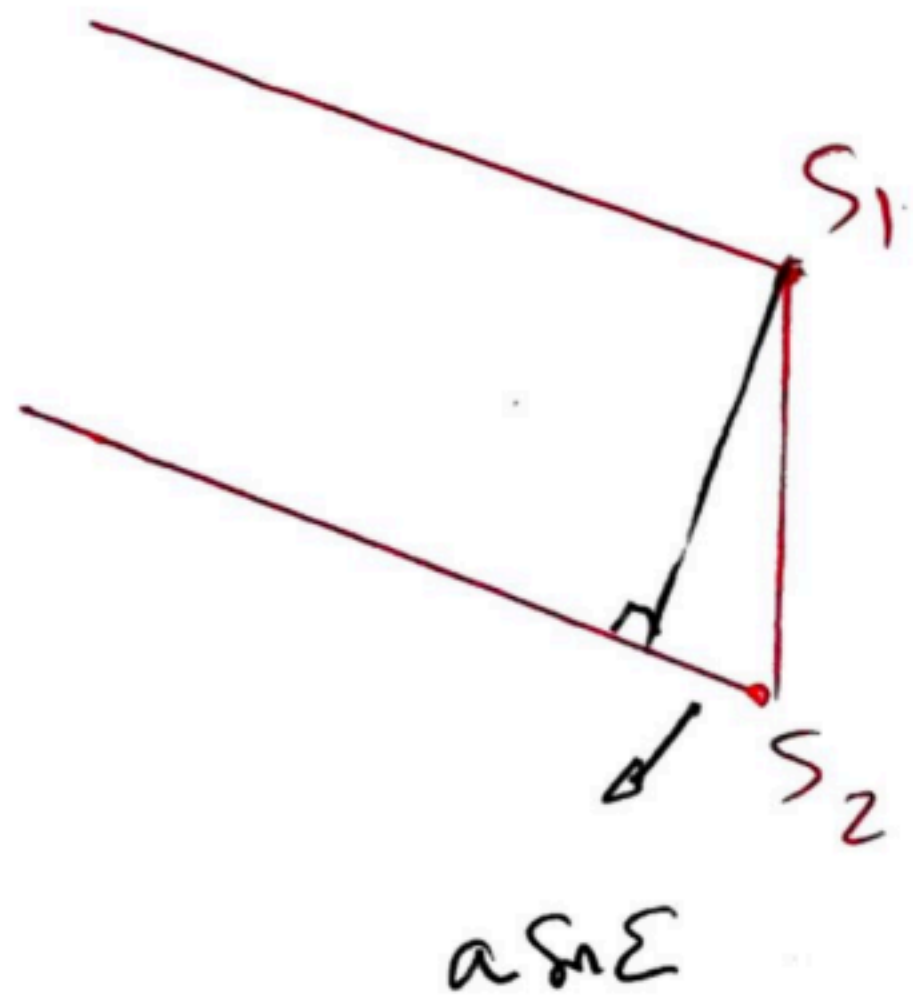
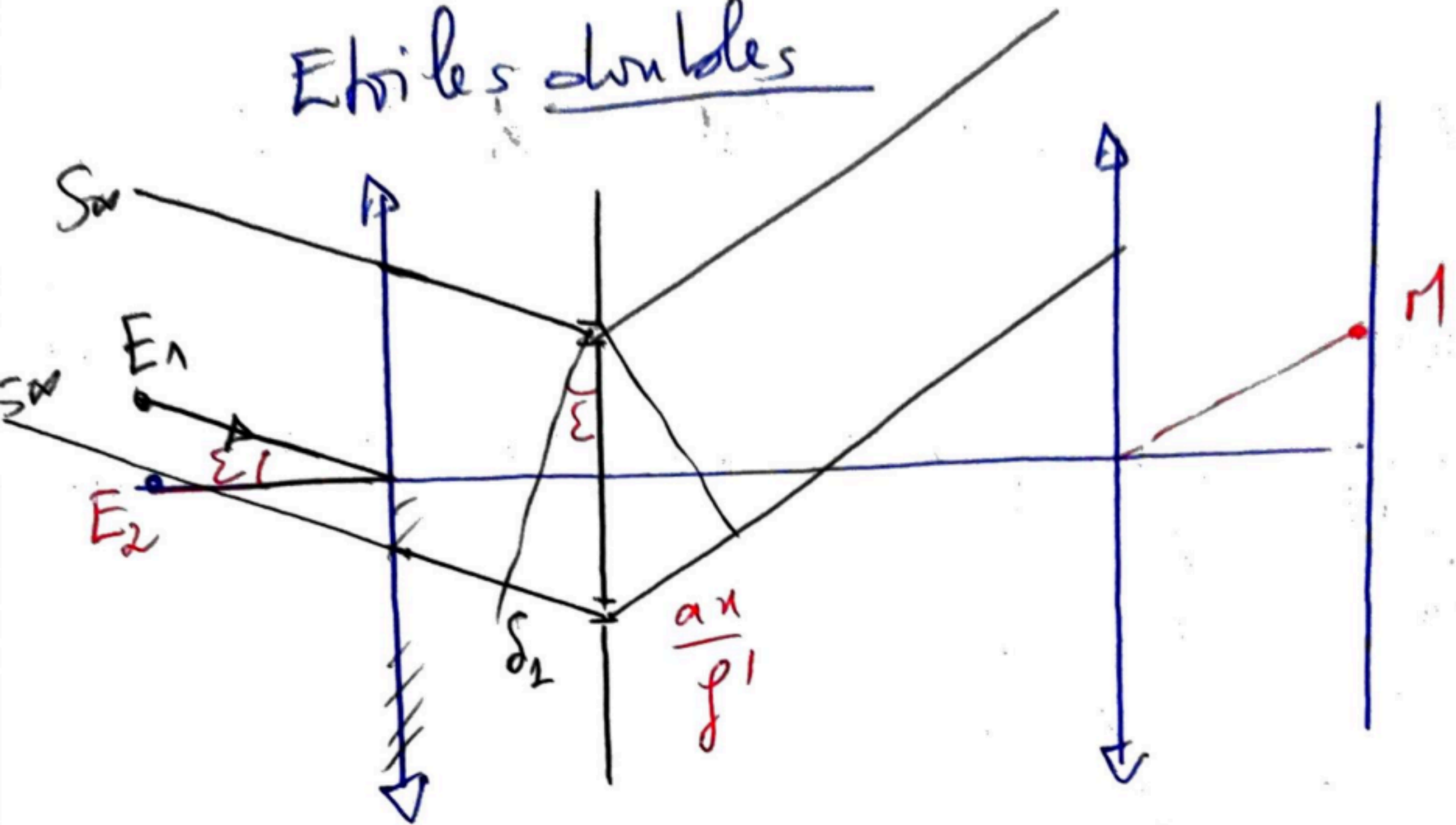
- 4- Pour quelle valeur θ_m de θ la fonction $\sin^2 \left(\frac{\pi a \cos \gamma \sin \theta}{\lambda} \right)$ admet-elle un maximum global ? On

remarque que θ_m correspond aux rayons qui se sont réfléchis selon les lois de Snell-Descartes de la réflexion. On souhaite que, pour $\theta = \theta_m$, qui correspond à un maximum d'intensité, la fonction $F_n(\phi)$ ait un maximum correspondant à l'ordre d'interférence $p = 140$. Ce réseau échelette permettra donc d'avoir un ordre d'interférence 140 très lumineux pour une longueur d'onde donnée. Déterminer l'angle γ correspondant, calculer sa valeur si $\lambda = 431 \text{ nm}$ et si le réseau contient 32 facettes par millimètre.

- 5- La source d'une onde électromagnétique plane de longueur d'onde λ possède une vitesse radiale v dans un référentiel galiléen d'origine O . Du fait de l'effet Doppler-Fizeau, un observateur fixe en O mesure, pour la longueur de cette même onde, une valeur $\lambda = \lambda_0 (1 - v/c)$. En déduire l'expression de la variation $\Delta \lambda$ en fonction de λ_0 , c et de la variation Δv . Pour l'étoile HD 209458, on veut pouvoir distinguer la variation de vitesse radiale Δv lorsque la vitesse passe de $14,68 \text{ km.s}^{-1}$ à $14,85 \text{ km.s}^{-1}$. On observe dans l'ordre deux la longueur d'onde $\lambda = 431 \text{ nm}$ avec le réseau échelette précédent. Déterminer l'expression de la variation $\Delta \theta$ de l'angle à la sortie du réseau associée à la variation Δv observée pour HD 209458. Calculer numériquement la valeur de $\Delta \theta$.

- 6- Lorsqu'on se place à un ordre élevé, on a un risque de chevauchement d'ordres. Quelles sont les longueurs d'onde λ' et λ'' qui correspondraient à la même déviation que la longueur d'onde $\lambda = 431 \text{ nm}$, dans l'ordre 140 mais avec des ordres 139 et 141 ?

Echelles doubles



$$I_{E_1}(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{ax}{f'} + a\epsilon \right) \right)$$

$$I_{E_2}(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{f'} \right) \right)$$

$$I_{\text{tot}} = 2I_0 \left(2 + 2 \cos \left(\frac{\pi a \epsilon}{\lambda} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{ax}{f'} + \frac{a\epsilon}{2} \right) \right) \right)$$

$$C = \left| \cos \left(\frac{\pi a \epsilon}{\lambda} \right) \right| = 0 \Rightarrow \frac{\pi a \epsilon}{\lambda} = \frac{\pi}{2}$$

$$a = \frac{\lambda}{2\epsilon}$$

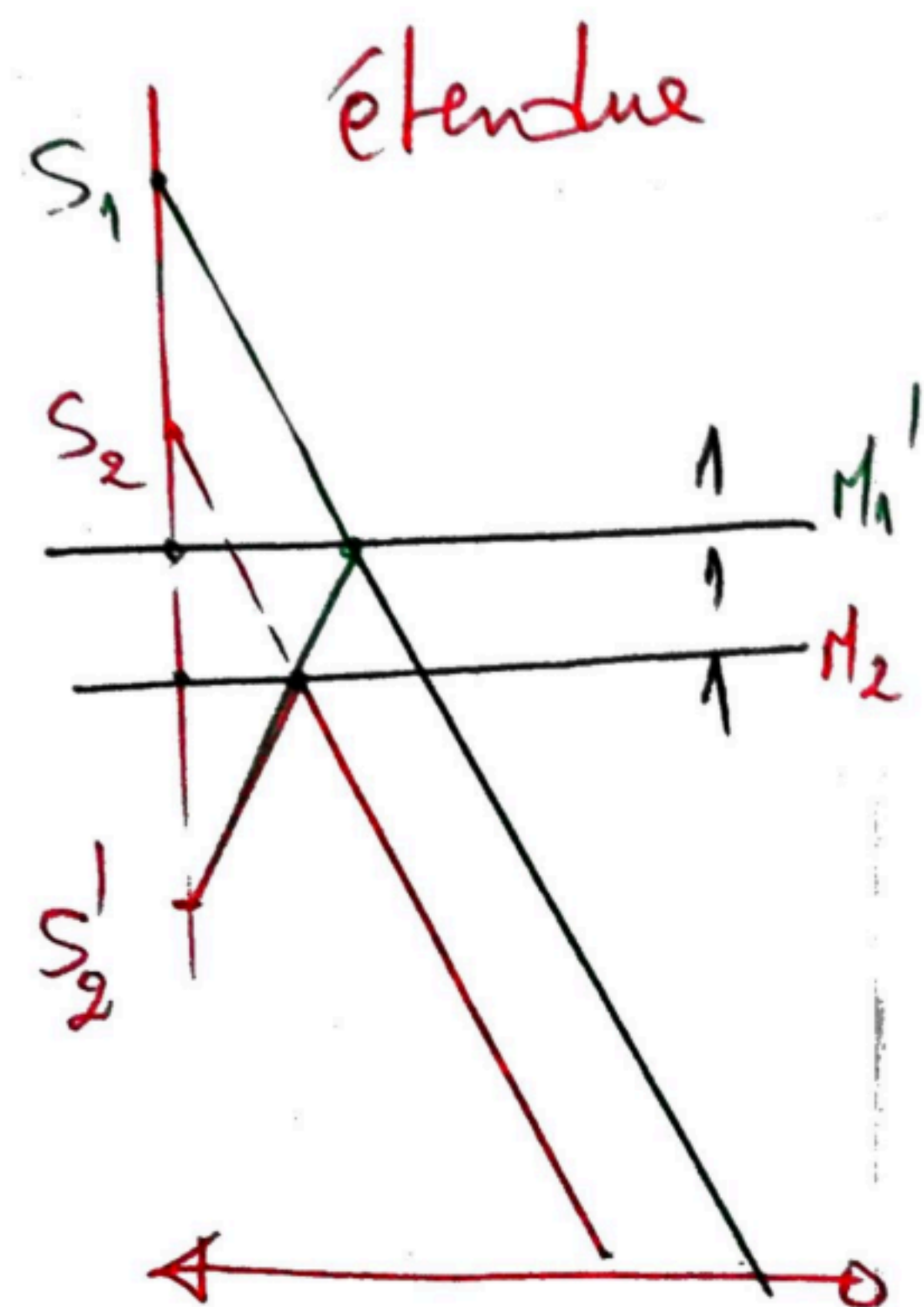
$$i = \frac{\lambda f'}{a}$$

$$\Delta x = \frac{i}{2} = \frac{\lambda f'}{2a} = n_{02} - n_{01} = \varepsilon f'$$

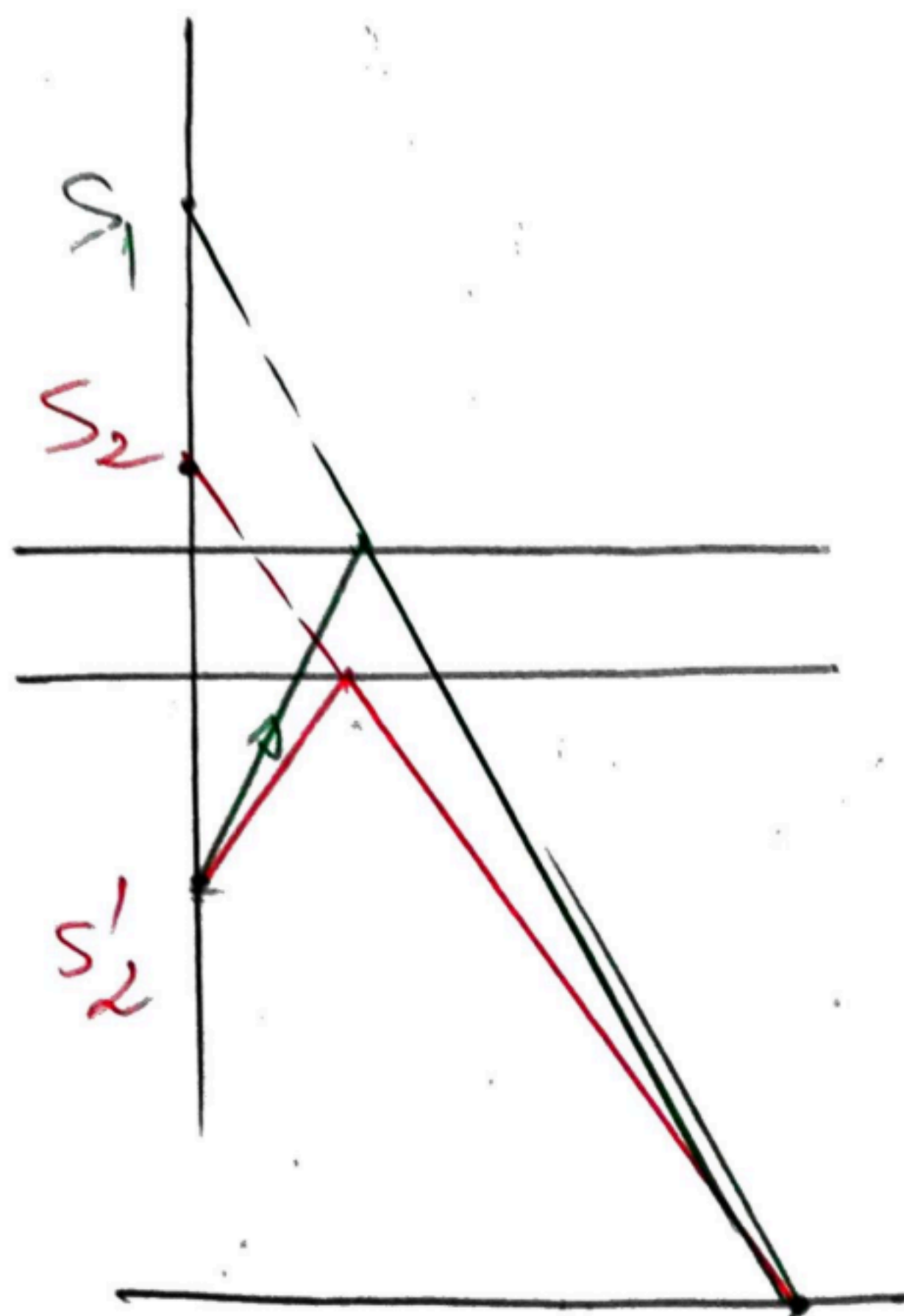
$$n_{02} = 0$$

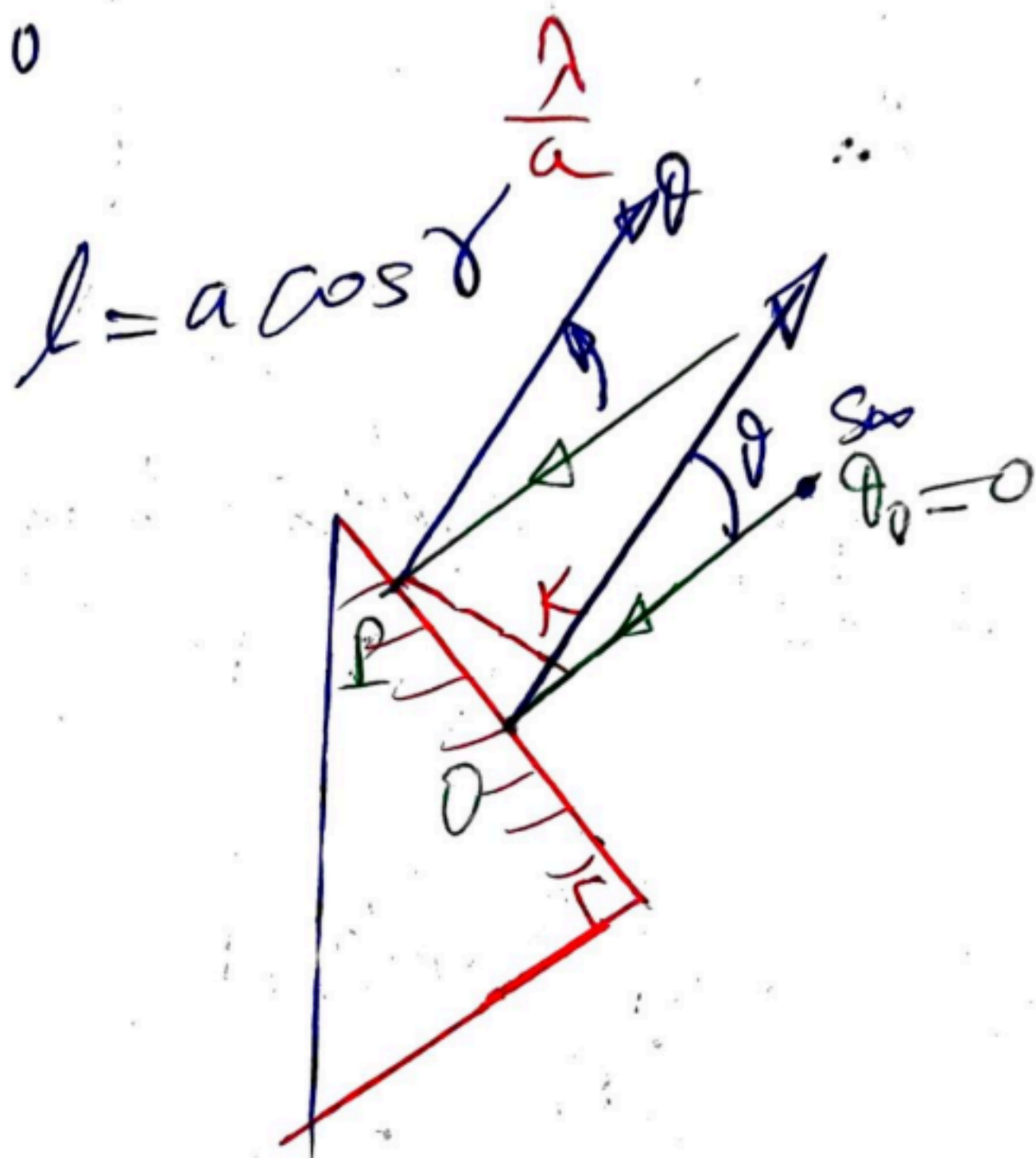
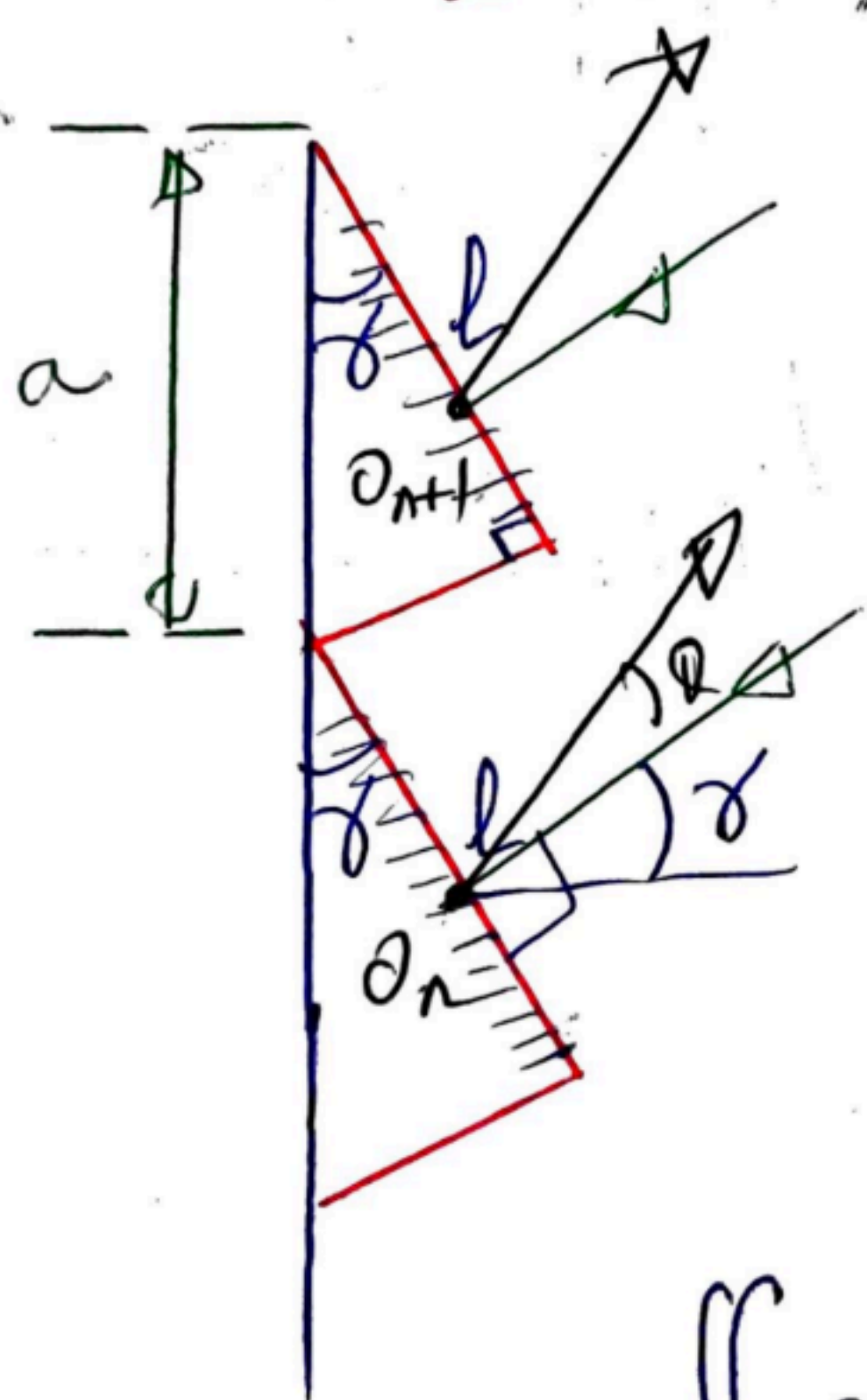
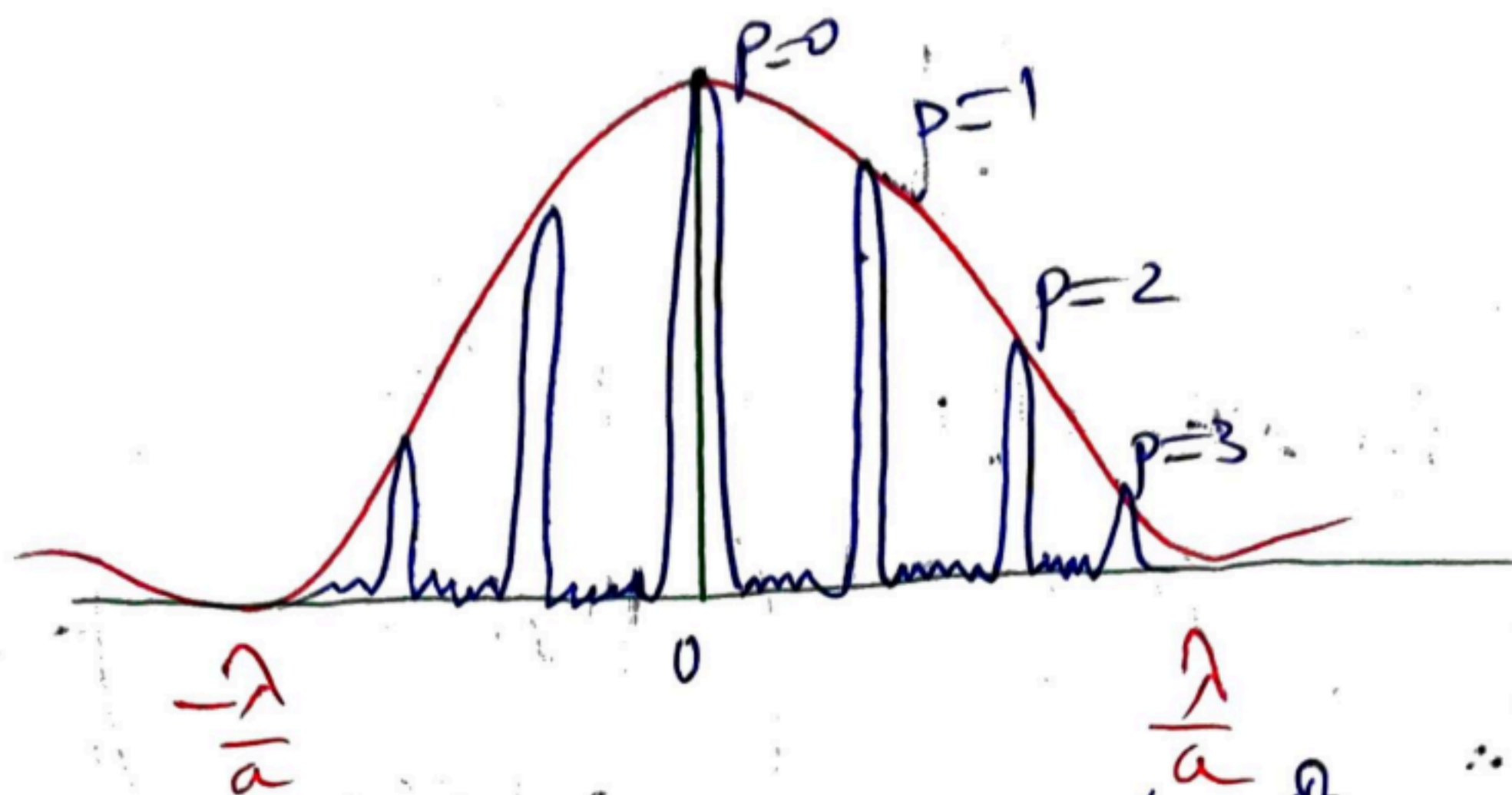
$$\delta(M) = \frac{ax}{f'} + \varepsilon a = 0 \Rightarrow n_{01} = -\varepsilon f'$$

$$a = \frac{\lambda}{2\varepsilon}$$



(E)





$$A_{diff} = A_0 \int \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} \delta_0/p\right) dx dy$$

$$\delta_0/p = (\delta_{\infty} 0 \pi_{\infty}) - (\delta_{\infty} l \pi_{\infty})$$

$$= (0 \pi_{\infty}) - (l \pi_{\infty}) = 0 \quad K = \pi \sin \theta$$

$$A_{diff} = a_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi l \sin \theta}{\lambda}\right)$$

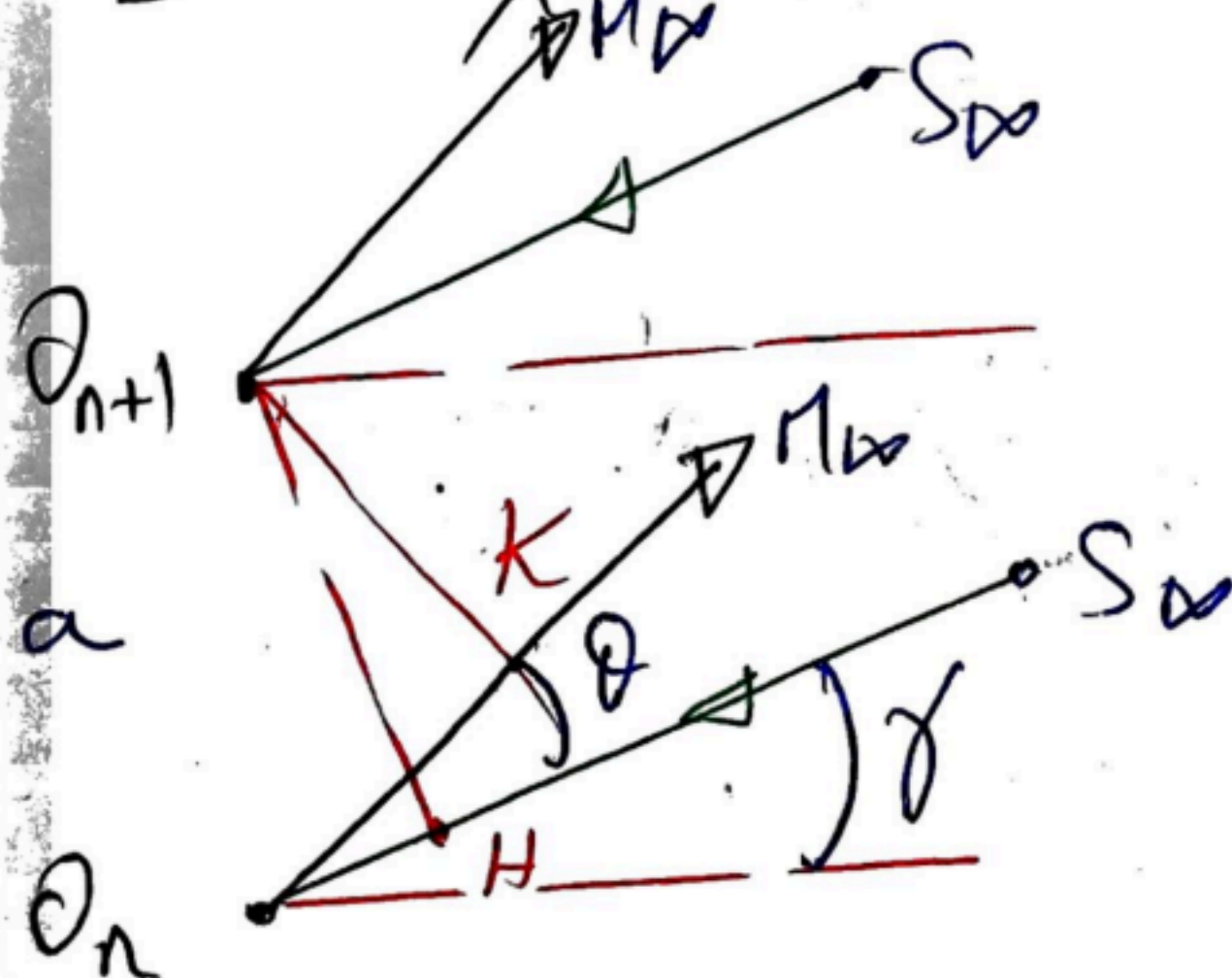
$$I_{diff} = I_0 \sin^2 \left(\frac{\pi a \cos \gamma \sin \theta}{\lambda} \right)$$

$$\underline{A}(t) = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 + \underline{A}_3 + \dots + \underline{A}_N$$

$$= A_0 e^{-i \frac{(N-1)\Phi}{2}} \left(\frac{\sin(N\Phi/2)}{\sin(\Phi/2)} \right) \sin \phi$$

$$I = I_0 N^2 \sin^2 \left(\frac{\pi a \cos \gamma \sin \theta}{\lambda} \right) \left[\frac{\sin \left(\frac{N\Phi}{2} \right)}{N \sin \left(\frac{\Phi}{2} \right)} \right]^2$$

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta O_n / O_{n+1}$$



$$\delta = (S O_n \parallel_\infty) - (S_\infty O_{n+1} \parallel_\infty)$$

$$= O_n H + O_n K = a (\sin \gamma + \sin(\gamma + \theta))$$

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} a (\sin \gamma + \sin(\gamma + \theta)) = 2\pi p$$

$$\boxed{\sin \gamma + \sin(\gamma + \theta) = \frac{p\lambda}{a}}$$

$$p = 140; \quad I_{\text{diff}} = I_0 \text{ max}; \quad \underline{\underline{\theta = 0}}$$

$$2 \sin \gamma = \frac{p\lambda}{a} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{p\lambda}{2a}$$

incidence oblique

$$\sin(\gamma + \theta_0) + \sin(\gamma + \theta_1) = \frac{p\lambda}{a}$$

$$I_{\text{diff}} = I_0 \sin^2 \left[\frac{\pi a \cos \gamma}{\lambda} (\sin \theta + \sin \theta_0) \right]$$

$$\theta = -\theta_0.$$

$$a = \frac{1}{32 \cdot 10^3} = \frac{1}{n}$$

$$5) \lambda = \lambda_0 \left(1 - \frac{v}{c} \right); \quad \lambda + \Delta \lambda = \lambda_0 \left(1 - \frac{(v + \Delta v)}{c} \right)$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0}{c} (-\Delta v)$$

$$a(\sin\gamma + \sin(\gamma+\theta)) = p\lambda$$

$$a \cos(\gamma+\theta) d\theta = p d\lambda$$

$$\Delta\theta = \frac{p \Delta\lambda}{a \cos(\gamma+\theta)} = \frac{a(\sin\gamma + \sin(\gamma+\theta))}{a \cos(\gamma+\theta)} \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

$$\underline{\underline{\theta=0}} \quad \Delta\theta = 2 \lg \gamma \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

$$\Delta\theta = 2 \lg(\gamma) \cdot \left(-\frac{\Delta v}{c} \right)$$