

Exercice: Énergie volumique du rayonnement thermique

La densité spectrale d'énergie:

$$u_\nu = \frac{du}{d\nu} = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}$$

1) L'énergie volumique du rayonnement associé aux photons dont les fréquences sont comprises dans l'intervalle spectral $(\nu; \nu + d\nu)$ est, à la température T donnée: $du = u_\nu d\nu$

L'énergie volumique totale du rayonnement dans l'enceinte est donc:

$$u = \int_0^\infty u_\nu d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}; \text{ soit, en posant: } x = \frac{h\nu}{k_B T} \Rightarrow$$

$$\nu = \frac{k_B T}{h} x \Rightarrow d\nu = \frac{k_B T}{h} dx$$

$$\text{Donc } u = \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{8\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

$$\text{Or } \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} \text{ donc } \left\{ u = \frac{8\pi^5 k_B^4 T^4}{15 h^3 c^3} \right\} \quad (1)$$

L'énergie volumique moyenne dans l'enceinte est donc proportionnelle à la puissance quatrième de la température du rayonnement en équilibre.

2) La puissance rayonnée par unité de surface (ou exitance) à la température T : $M(T) = c \frac{u(T)}{4}$

$$\text{d'après (1)} \Rightarrow M = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} T^4 = \sigma T^4 \Rightarrow \begin{matrix} \text{Kichow} \\ \text{Stefan} \end{matrix}$$

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$$

3) Posons $x = \frac{h\nu}{k_B T}$; la densité spectrale d'énergie :

$$u = \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{k_B T}{h}\right)^3 \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{8\pi k_B^3 T^3}{c^3 h^2} \frac{x^3}{e^x - 1}$$

sera maximale pour les photons d'énergie $h\nu$ telle que :

$$\frac{du}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{x^3}{e^x - 1} \right) = 0 \text{ ou } \frac{3x^2(e^x - 1) - x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 [3e^x - 3 - x e^x] = 0 \Rightarrow e^x (3 - x) = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{e^x = 1 - \frac{x}{3}} \quad (2)$$

la solution x de cette égal^e encadrée est légèrement inférieure à 3, soit $3 - \varepsilon = x$ avec ($\varepsilon \ll 3$)

$$e^{-(3-\varepsilon)} = e^{(\varepsilon-3)} \approx 1 - \frac{3-\varepsilon}{3} \approx \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow e^{\varepsilon} = \frac{\varepsilon e^3}{3}$$

$$\text{d.l.} : e^{\varepsilon} \approx 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} = \frac{\varepsilon e^3}{3} = 6,7 \varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon^2 - 11,4 \varepsilon + 2 = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0,18 \text{ solut^o acceptable}$$

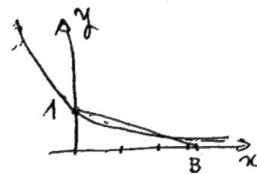
$x = \frac{h\nu}{k_B T} = 2,82$; d'où la fréquence des photons associés à la densité spectrale d'énergie maximale est :

$$\nu_0 = \frac{2,82 k_B T}{h} \text{ et la longueur d'onde } \lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_0 = \frac{ch}{2,82 k_B T} = 2,8 \mu\text{m}} \text{ (domaine infra-rouge)}$$

$$\text{4) } u_{\lambda} = \left| \frac{du}{d\lambda} \right| = \left| \frac{du}{d\nu} \cdot \frac{d\nu}{d\lambda} \right| = \left| u_{\nu} \cdot \frac{d(c/\lambda)}{d\lambda} \right| \quad \text{K:R}$$

$$= \left| u_{\nu} \cdot \left(-\frac{c}{\lambda^2} \right) \right| = \frac{c}{\lambda^2} u_{\nu} = \frac{\nu^2}{c} u_{\nu}$$



$$\boxed{u_{\lambda} = \frac{8\pi h}{c^4} \frac{\nu^5}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}} \quad (3)$$

$$M_\lambda = \frac{dM}{d\lambda} = \frac{C_1 \lambda}{4}$$

a)

$$M_\lambda = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1} = \frac{C_1}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1}$$

$$C_1 = 2\pi h c^2 = 3,75 \cdot 10^{-16} \text{ W m}^2$$

$$C_2 = \frac{hc}{k_B} = 1,44 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

b) si on pose $y = \frac{hc}{\lambda k_B T}$; $M_\lambda = \text{cte} \frac{y^5}{e^y - 1}$; $\text{cte} = \frac{2\pi k^5 T^5}{c^3 h^4}$

M_λ passe donc par un maximum pour $\lambda = \lambda_{\text{max}}$ /

$$\frac{dM_\lambda}{dy} = 0 \quad \text{soit : } 5y^4(e^y - 1) - y^5 e^y = 0 \quad \text{ou } e^{-y} = 1 - \frac{y}{5}$$

$y = 5 - \varepsilon$; ($\varepsilon \ll 1$) solut° : K. R.

$$e^{-(5-\varepsilon)} = e^{-5} e^\varepsilon = 1 - \frac{5-\varepsilon}{5} = \frac{\varepsilon}{5} \Rightarrow e^\varepsilon = \frac{\varepsilon}{5} e^5$$

$$e^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} = \frac{\varepsilon e^5}{5} \Rightarrow \varepsilon^2 - 57,36\varepsilon + 2 = 0$$

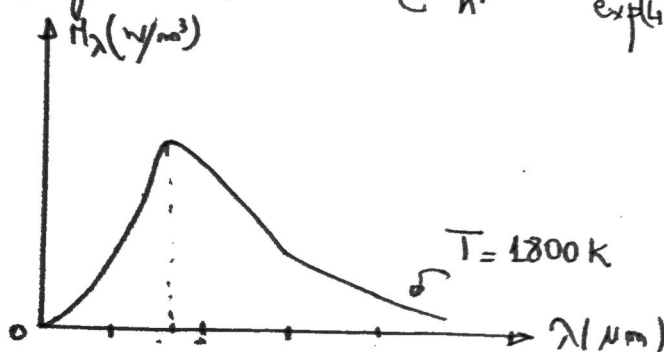
2° solut° acceptable et $\varepsilon = 0,0035 \Rightarrow y = \frac{hc}{\lambda k_B T} = 4,965$

$$\boxed{\lambda_m = \frac{hc}{4,965 k_B T} = 4,60 \mu\text{m} \text{ (I.R.)}}$$

2° $\lambda_m \cdot T = \frac{hc}{4,965 k_B} = 2900 \mu\text{m} \cdot \text{K} \quad (\text{loi de Wien})$

c) L'existence spectrale maximale vaut, à la température T , d'après (3)

$$(M_\lambda)_m = M_\lambda(y = 4,965) = \frac{2\pi k^5 T^5}{c^3 h^4} \frac{(4,965)^5}{\exp(4,965) - 1} = 2,41 \cdot 10^{11} \text{ W/m}^3$$



page (3)

$$d) T \ll \frac{h\nu}{k} \rightarrow h\nu \gg kT, \quad \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \approx \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)$$

$$a) \text{ ~~M}_\lambda~~ \quad u_\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right)$$

$$u_\lambda = \left| \frac{du}{d\lambda} \right| = \frac{c}{\lambda^2} u_\nu \quad ; \quad M_\lambda = \frac{c u_\lambda}{4} = \frac{c^2}{4\lambda^2} u_\nu \quad ; \quad \nu = \frac{c}{\lambda}$$

$$M_\lambda = \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 \frac{c^2}{4\lambda^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right)$$

$$\boxed{M_\lambda = 2\pi h c^2 \cdot \frac{1}{\lambda^5} \cdot \exp\left(-\frac{hc}{\lambda k_B T}\right)}$$

K. Bohne

$$b) \frac{dM_\lambda}{d\lambda} = 0 \Rightarrow 2\pi h c^2 \left[-\frac{5}{\lambda_m^6} + \frac{hc}{kT} \frac{1}{\lambda_m^7} \right] e^{-\frac{hc}{\lambda_m kT}} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_m T = \frac{hc}{5k} = c_2 = 2880 \mu m K$$

c) L'approximation de Wien à basse température n'est acceptable que si $\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) > 100$ pour pouvoir négliger 1 devant l'exp.

$$\frac{h\nu}{kT} = \frac{hc}{\lambda kT} > \ln 100 = 4,6 \Rightarrow \lambda < \lambda_m = \frac{hc}{4,6 kT} = 8,4 \mu\text{m}.$$

f) Hautes températures $h\nu \ll kT$; $\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \approx 1 + \left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 = \frac{h\nu}{kT}$

$$u_\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 \frac{kT}{h\nu} = \frac{8\pi kT}{c^3} \nu^2$$

$$M_\lambda = \frac{c^2}{4\lambda^2} u_\nu = \frac{2\pi kT \nu^2}{c \lambda^2} \quad \text{avec } \nu = \frac{c}{\lambda}$$

$$\left\{ M_\lambda = 2\pi c \frac{kT}{\lambda^4} \right\} \quad (\text{loi de Jeans-Rayleigh})$$

$$h\nu \ll kT.$$