

Etat liés d'une particule dans un puits en fonction delta

On considère une particule dans un problème à une dimension dans un potentiel de la forme

$$V(x) = -\alpha \delta(x) \quad \begin{cases} \alpha: \text{constante positive} \\ \delta(x): \text{"Fonction" de Dirac} \end{cases}$$

Test

On suppose que l'énergie E de la particule est négative (état lié), dans ce cas la fonction d'onde s'écrit :

$$x < 0 \quad \psi(x) = A e^{qx} + B e^{-qx}; \quad x > 0 \quad \psi(x) = C e^{qx} + D e^{-qx}$$

où q est une constante qui dépend de E et m .

1) La dérivée première ($\psi'(x)$) de la fonction $\psi(x)$ présente une discontinuité en $x = 0$, $\Delta \psi'(0) \neq 0$.

On donne :
$$\Delta \psi'(0) = \psi'(0^+) - \psi'(0^-) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2} \psi(0) = 2kq\psi(0)$$

En utilisant la continuité de $\psi(x)$. Donner la matrice M en fonction de k définie par :

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

2) a) Sachant que $\psi(x)$ représente un état physique, donner les expressions normalisées de $\psi(x)$. En déduire la valeur de l'énergie E .

b) Représenter graphiquement ces fonctions en précisant leur portée ℓ en fonction de q . En déduire leur largeur Δx (Δx : extension spatiale de $\psi(x)$).

3) a) Calculer la transformée de fourrier $\phi(p)$ de la fonction $\psi(x)$.

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \exp\left(-i \frac{p}{\hbar} x\right) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(\hbar q)^{3/2}}{(\hbar q)^2 + p^2}$$

b) Calculer $|\phi(p)|^2$, que représente ce terme ?

c) Pour quelle valeur p_0 de l'impulsion, $|\phi(p)|^2$ est maximale ?

d) On définit Δp (dispersion de l'impulsion de la particule dans son état lié) par $\Delta p = p - p_0$ où p vérifie la relation $|\phi(p)|^2 = \frac{|\phi(p_0)|^2}{2}$, montrer que $\Delta p = \hbar q$.

e) Evaluer le produit $\Delta x \cdot \Delta p$. Conclure.

Calcul du coefficient de transmission dans le cas d'une particule dans un puits en fonction delta

On considère un "puits delta" centré sur le point a correspondant au potentiel singulier :

$$V(x) = -\eta \delta(x-a) \quad (\eta > 0) \text{ où } \delta(x-a) \text{ représente la distribution de Dirac}$$

1) En intégrant l'équation de Schrodinger entre $a - \epsilon$ et $a + \epsilon$ ($\epsilon > 0$ et tend vers 0) Déterminer l'équation de discontinuité de la dérivée première ($\psi'(x)$) de la fonction d'onde $\psi(x)$ représentant un état stationnaire d'énergie E associée à ce puit.

$$\psi'(a + \epsilon) - \psi'(a - \epsilon) = -\gamma \psi(a)$$

où γ est une constante qui dépend de η , $\hbar$ et m .

2) Montrer qu'il existe un état lié dont son énergie $E = -\frac{m\eta^2}{2\hbar^2}$ et la fonction d'onde correspondantes.

3) Dans le cas où $E > 0$, montrer l'expression suivante du coefficient de transmission en fonction de l'énergie : $T(E) = \frac{1}{1 + \frac{m\eta^2}{2\hbar^2 E}}$. Donner sa représentation graphique.