

On considère une particule de masse m se déplaçant selon l'axe (Ox), soumise au potentiel défini par :

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{si } |x| \leq a \\ 0 & \text{si } |x| > a \end{cases} \quad \text{avec } V_0 > 0$$

On note par E l'énergie de la particule.

Partie I : États liés ($E < 0$)

On pose : $k = \sqrt{\frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2}}$, $\alpha = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}$

1. Écrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans les zones :
 - $|x| \leq a$
 - $|x| > a$
2. Donner la forme générale des solutions dans chaque zone.
3. En utilisant la condition de normalisation, préciser la forme des solutions pour $|x| > a$.
4. Énoncer les conditions de continuité en $x = a$.
5. Le potentiel étant symétrique, expliquer pourquoi les solutions peuvent être choisies paires ou impaires.
6. Montrer que les énergies des états liés vérifient :

$$\tan(ka) = \frac{\alpha}{k} \text{ (états pairs)} ; \tan(ka) = -\frac{k}{\alpha} \text{ (états impairs)}$$
7. Expliquer en une phrase pourquoi le nombre d'états liés est fini.

Partie II : États de diffusion ($E > 0$)

On pose : $k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$, $k_2 = \sqrt{\frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2}}$

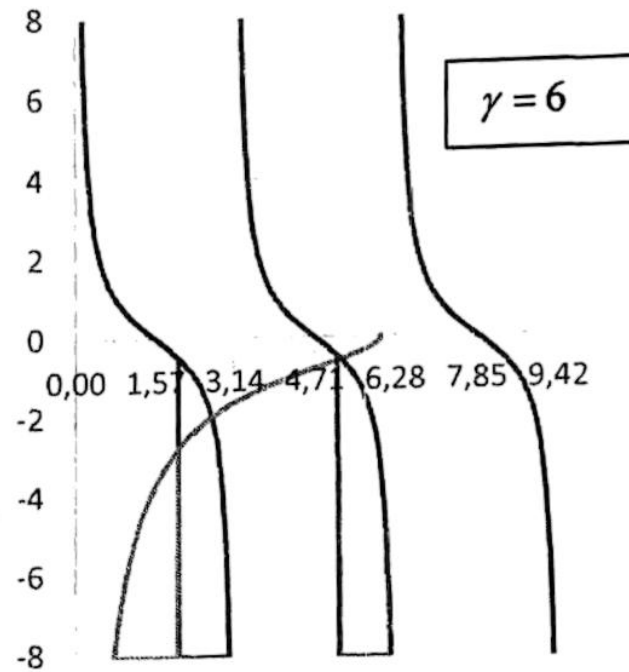
8. Donner la forme des fonctions d'onde dans les trois régions.
9. Identifier chacune des ondes incidente, réfléchie et transmise.
10. Donner la relation entre les coefficients de réflexion R et de transmission T , et expliquer brièvement sa signification physique.
11. Expliquer qualitativement pourquoi il peut exister des énergies pour lesquelles la transmission est totale ($T = 1$).
12. Donner deux différences essentielles entre états liés et états de diffusion (énergie et comportement de la fonction d'onde)

	τ^* - Pour $T \ll \frac{2\varepsilon}{K_B}$; $\langle E \rangle = E_0 - \varepsilon$ énergie de l'état fondamental - Pour $T \gg \frac{2\varepsilon}{K_B}$; $\langle E \rangle = E_0$	
--	--	--

Partie III : Puits de potentiel asymétrique (18 pts)

III.1.		
III.1.a	continuité de la fonction d'onde en $x = 0$: $\varphi(x \rightarrow 0^+) = \varphi(x \rightarrow 0^-) = 0$ continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée en $x = a$. $\begin{cases} \varphi(x \rightarrow a^+) = \varphi(x \rightarrow a^-) \\ \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)_{x \rightarrow a^+} = \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)_{x \rightarrow a^-} \end{cases}$	3
III.1.b	L'équation de Schrödinger indépendante du temps s'écrit : $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\varphi = 0$ - Pour $x < 0$; $V = 0$ donc $\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\varphi$ $\varphi(x) = A \sin(qx)$ avec $q^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ car $\varphi(0) = 0$ - Pour $x > a$; $V = V_0$ donc $\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}\varphi$ $\varphi(x) = B \exp\left(-\frac{x}{x_0}\right) + C \exp\left(\frac{x}{x_0}\right)$ φ est normalisée si et seulement si $C = 0$ Donc $\varphi(x) = B \exp\left(-\frac{x}{x_0}\right)$ avec $\frac{1}{x_0^2} = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$	4
III.1.c	x_0 est une longueur de pénétration de la particule dans la partie classiquement interdite, sans équivalent classique. En électromagnétisme, on retrouve ce phénomène pour les milieux réactifs (plasma en dessous de la pulsation de coupure)	1

III.2.		
III.2.a	En utilisant les conditions aux limites en $x = a$, on obtient :	3

	$\begin{cases} A \sin(qa) = B \exp\left(-\frac{a}{x_0}\right) \\ qA \cos(qa) = -\left(\frac{B}{x_0}\right) \exp\left(-\frac{a}{x_0}\right) \end{cases}$ $\Rightarrow \cot g(y) = -\frac{\sqrt{\gamma^2 - y^2}}{y} \text{ où } y = qa \text{ et } \frac{\hbar^2 \gamma^2}{2ma^2} = V_0$	
III.2.b)	La pente de $g(y) = -\frac{\sqrt{\gamma^2 - y^2}}{y}$ en $y = \gamma$ est infinie : $\frac{dg}{dy} = \frac{\gamma^2}{y^2 \sqrt{\gamma^2 - y^2}}$ 	3
III.3.		
III.3.a)	La première solution apparaît dès lors que γ franchit la valeur de $\pi/2$. $\gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow W = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2}$	2
III.3.b)	L'état lié étant localisé sur environ a, on lui associe, conformément à la relation de Heisenberg $p \sim \Delta p \neq 0$ donnant une énergie cinétique minimale non nulle qui ne sera inférieure à V_0 (état lié) que pour V_0 suffisant. Ceci est la condition pour un état lié et montre l'existence d'un seuil d'énergie pour avoir un état piégé. On remarque que W est plus petit que E_1 du puits infini, ce qu'on peut attribuer à la localisation moins forte puisque la particule « pénètre » partiellement dans la zone interdite $\Rightarrow \Delta x \uparrow \Leftrightarrow \Delta p \downarrow \Rightarrow E_{\text{cmin}} \downarrow$ aussi.	2