



AVIS IMPORTANT AUX ETUDIANTS

1. Chacune des feuilles de votre copie doit comporter une étiquette code à barres placée à l'endroit indiqué «coller ici votre code à barres»
2. Une copie d'examen comporte une seule «feuille principale» et des «feuilles suites» Sur chacune de vos feuilles, le code à barres est obligatoire
3. Cette feuille d'examen est strictement personnelle Elle ne doit comporter aucun signe distinctif Elle doit être écrite en noir et/ou bleu
4. Le non respect de l'une de ces exigences peut faire attribuer la note ZERO à l'épreuve

NOTE

Coller ici votre
code à barre

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

00	25	50	75

ÉPREUVE DE PHYSIQUE DE LA FIN DU SECOND SEMESTRE

MP2

Mai 2026

Durée : 4h

Consignes générales

- La présentation et la rédaction doivent être claires et soignées. Rappeler avec précision les références des questions traitées.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale et poursuit en indiquant clairement les raisons des initiatives prises.
- Un résultat donné par l'énoncé mais non démontré peut être admis pour les questions suivantes.

Données numériques

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • Constante de Planck : $h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J.s}$ • Charge élémentaire : $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$ • Masse de l'électron : $m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$ • Masse du proton : $m_p = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$ • Constante de Boltzmann : $k_B = 1,381 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ • Vitesse de la lumière : $c = 2,999 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ | <ul style="list-style-type: none"> • Conductivité thermique de l'air : $\lambda_{\text{air}} = 0,026 \text{ W.m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ • Conductivité thermique du cuivre : $\lambda_{\text{Cu}} = 385 \text{ W.m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ • Conductivité thermique de l'aluminium : $\lambda_{\text{Al}} = 205 \text{ W.m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ • Conductivité thermique du verre : $\lambda_{\text{verre}} = 1,1 \text{ W.m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ • Constante de Stefan-Boltzmann : $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W.m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ • $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$ |
|---|---|

Nom, prénom et signature de
l'enseignant surveillant



Le sujet comporte cinq parties indépendantes. La première consiste en une série de questions à choix multiples (**QCM**). Les autres parties s'articulent autour du **microscope à effet tunnel (STM)**, instrument emblématique de la physique quantique moderne, puis abordent le **transfert thermique** dans les structures nanométriques. L'équation de Schrödinger constitue le fil conducteur des parties 2, 3 et 4, tandis que la cinquième explore, dans un cadre applicatif, les mécanismes de conduction, de convection et de rayonnement.

Première Partie : Q.C.M.

Cocher la ou les cases correspondantes aux bonnes réponses.

Q01. Un mur plan infini, de conductivité thermique λ et d'épaisseur L , est soumis à des températures T_1 et T_2 sur ces deux faces, en régime permanent. La puissance thermique volumique dissipé à l'intérieur du mur est :

☐ $\frac{\lambda}{L}(T_1 - T_2)$ par unité de surface

☒ Nul

☐ $\frac{\lambda}{L^2}(T_1 - T_2)$ par unité de volume

☐ Proportionnel au carré du gradient de température

Q02. Dans une ailette cylindrique de longueur $L \gg \frac{1}{m} \left(m = \sqrt{\frac{2h}{\lambda r}} \right)$, quelle est la condition aux limites appropriée à l'extrémité libre pour simplifier le calcul ?

h est le coefficient de convection entre l'ailette et le fluide environnant, r est le rayon de l'ailette et λ est la conductivité thermique du matériau de l'ailette.

☒ $T(L) = T_\infty$ (température imposée)

☐ $-\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = h(T(L) - T_\infty)$

☐ $\frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = 0$ (flux nul)

☐ $T(L) = 0$

Q03. Une particule de masse m est confinée dans un puits infini 1D de largeur a . Quelle est l'énergie de son état fondamental ?

☐ $E_1 = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{ma^2}$

☐ $E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{ma^2}$

☐ $E_1 = \frac{\hbar^2}{2ma^2}$

☒ $E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$

Q04. Une particule d'énergie E aborde une marche de potentiel de hauteur V_0 telle que $E < V_0$. Que peut-on affirmer sur le coefficient de transmission T du courant de probabilité et la fonction d'onde Ψ dans la région où $V = V_0$?

☒ Le coefficient de transmission est nul

☐ La particule traverse la marche par effet tunnel

☐ La fonction d'onde est oscillante dans cette région.

☒ La fonction d'onde Ψ est évanescente dans cette région.



Coller ici votre
code à barre

Q05. L'inégalité de Heisenberg stipule que, pour la position x et l'impulsion p_x d'une particule :

☐ $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$

☐ $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar^2}{2}$

☒ $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$

☐ $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq 0$ il n'y a pas de limite inférieure

Q06. Une particule libre en une dimension est décrite par la fonction d'onde $\Psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} + Be^{-i(kx + \omega t)}$ où A et B sont des constantes complexes. Parmi les propositions suivantes concernant la densité de probabilité de présence $\rho(x, t) = |\Psi(x, t)|^2$, lesquelles sont correctes ?

☒ $\rho(x, t)$ dépend de la position x et présente des interférences spatiales

☒ $\rho(x, t)$ est indépendante du temps

☐ $\rho(x, t)$ est uniforme dans l'espace

☒ Si $|A| = |B|$, alors $\rho(x, t)$ présente des maxima et minima périodiques en x

Q07. Dans le modèle d'Einstein du solide cristallin (un cristal constitué de N oscillateurs harmoniques 3D indépendants de pulsation ω_e), on note $\theta_e = \frac{\hbar \omega_e}{k_B}$ la température d'Einstein. À haute température $T \gg \theta_e$, quelles affirmations concernant la capacité thermique à volume constant C_v sont correctes ?

☒ $C_v \rightarrow 3R$ (par mole)

☐ C_v est proportionnelle à T^3 .

☒ C_v devient indépendante de la température

☐ $C_v \rightarrow 0$

Q08. La fonction de partition canonique Z d'un système à deux niveaux d'énergies 0 et ε est :

☐ $Z = e^{-\beta \varepsilon}$

☐ $Z = 1 - e^{-\beta \varepsilon}$

☒ $Z = 1 + e^{-\beta \varepsilon}$

☐ $Z = e^{\beta \varepsilon} + e^{-\beta \varepsilon}$

Deuxième Partie : Onde de De Broglie et mécanique quantique

On s'intéresse au mouvement à une dimension d'une particule non relativiste de masse m et d'énergie totale $E > 0$ se déplaçant parallèlement à l'axe (Ox) dans un potentiel $V(x)$. On note $\Psi(x, t)$ la fonction d'onde complexe associée à la particule. L'équation de Schrödinger s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

Dans toute la suite, on cherche des solutions pour des états stationnaires de la forme : $\Psi(x, t) = \varphi(x) e^{-i \frac{E}{\hbar} t}$.



Q09. Quelle est la relation entre la mécanique quantique et la mécanique classique ? Citer au moins deux faits ou phénomènes physiques historiques qui ont conduit au développement de la mécanique quantique.

Faits historiques ayant imposé la mécanique quantique :

- **Rayonnement du corps noir (Planck, 1900).** La loi de Rayleigh-Jeans classique diverge dans l'UV (« catastrophe ultraviolette »). Planck postule que l'énergie des oscillateurs est quantifiée.
- **Effet photoélectrique (Einstein, 1905).** L'émission d'électrons par un métal éclairé ne dépend pas de l'intensité mais de la fréquence de la lumière, incompréhensible classiquement. Einstein introduit le photon d'énergie $E = h\nu$.
- **Spectres atomiques discrets.** Les raies d'émission de l'hydrogène (série de Balmer, 1885 ; modèle de Bohr, 1913) ne peuvent s'expliquer que par des niveaux d'énergie quantifiés.
- **Effet Compton (1923).** La diffusion des rayons X par les électrons révèle le caractère corpusculaire du photon (échange quantifié d'impulsion).

Q10. Décrire une expérience illustrant la notion d'onde de matière (onde de De Broglie).

Expérience des fentes de Young avec des électrons (Davisson-Germer, 1927 ; Jönsson, 1961). Un faisceau d'électrons homocinétique est envoyé sur un écran percé de deux fentes très fines séparées d'une distance d comparable à la longueur d'onde de De Broglie $\lambda = h/p$. On observe sur un détecteur placé en aval des franges d'interférence (alternance de zones de forte et faible probabilité de détection), exactement comme pour la lumière. Ce résultat démontre sans ambiguïté le **caractère ondulatoire** des électrons.

Remarque. L'expérience reste valable avec des neutrons, des atomes, voire de grosses molécules (fullerène C_{60}), confirmant l'universalité de la dualité onde-corpuscule.

Q11. Énoncer la relation de De Broglie reliant la quantité de mouvement p et la longueur d'onde λ d'une particule matérielle. Interpréter cette relation physiquement.

De Broglie (1924) associe à toute particule matérielle de quantité de mouvement p une longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

Interprétation : Cette relation établit un pont entre les grandeurs corpusculaires (p) et ondulatoires (λ). Plus une particule est rapide (ou lourde), plus sa longueur d'onde est petite et ses effets ondulatoires difficiles à observer. C'est pourquoi les phénomènes quantiques sont invisibles à l'échelle macroscopique : une balle de tennis ($m \sim 50 \text{ g}$, $v \sim 50 \text{ m/s}$) aurait ($\lambda \sim 10^{-34} \text{ m}$), bien en dessous de toute résolution mesurable.

Q12. D'après la mécanique classique, déterminer la vitesse v_e acquise par un électron de masse m_e et de charge $(-e)$ accéléré par une tension U_a .

Un électron au repos est accéléré par une différence de potentiel $U_a > 0$. En appliquant le théorème travail-énergie cinétique (en régime non relativiste) :

$$\underset{\text{travail de la force électrique}}{eU_a} = \frac{1}{2} m_e v_e^2 - 0 \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2eU_a}{m_e}}$$

Q13. Exprimer la longueur d'onde λ_e d'un électron de vitesse v_e en fonction du potentiel d'accélération U_a (hypothèse non relativiste $v_e \ll c$). Calculer les longueurs d'onde λ_1 , λ_2 et λ_3 pour $U_{a1} = 1kV$, $U_{a2} = 100kV$ et $U_{a3} = 1MV$. Vérifier dans chaque cas la validité de l'approximation non relativiste, sachant qu'un calcul relativiste donne : $\lambda_1 = 38,8 pm$, $\lambda_2 = 3,71 pm$, $\lambda_3 = 0,94 pm$.

D'après Q11 et Q12,
$$\begin{cases} \lambda_e = \frac{h}{m_e v_e} \\ v_e = \sqrt{\frac{2eU_a}{m_e}} \end{cases} \Rightarrow \lambda_e = \frac{h}{m_e \sqrt{\frac{2eU_a}{m_e}}} = \frac{h}{\sqrt{2m_e e U_a}} \Rightarrow \lambda_e (m) = \frac{1,226 \times 10^{-9}}{\sqrt{U_a (V)}}$$

Application numérique :
$$\lambda_e (m) = \frac{1,226 \times 10^{-9}}{\sqrt{U_a (V)}}$$

U_a	λ_e (Classique)	v_e / c	(relativiste)	validité NR
1 kV	38,8 pm	6,3 %	38,8 pm	Excellente
100 kV	3,88 pm	55 %	3,71 pm	Limite (- 4 %)
1 MV	1,23 pm	-	0,94 pm	Invalide (+ 30 %)

Remarque. Pour $U_a = 100kV$, $v_e / c \approx 55\%$: le traitement relativiste est nécessaire. Pour $U_a = 1MV$, l'électron est ultra-relativiste ; la formule classique surestime λ_e de 30 %.

Q14. Pourquoi décrit-on l'état d'une particule au moyen d'une fonction d'onde complexe $\Psi(x, t)$ plutôt que réelle ?

En mécanique quantique, l'état d'une particule est décrit par une fonction d'onde. La probabilité de présence est donnée par $|\Psi(x, t)|^2$, qui est une grandeur réelle et positive. Cependant, la description de l'état quantique ne se limite pas à cette probabilité : la **phase** de la fonction d'onde joue un rôle essentiel. Pour rendre compte correctement des phénomènes d'interférence, il est nécessaire que $\Psi(x, t)$ soit **complexe**.

Plus fondamentalement, le caractère complexe de $\Psi(x, t)$ est imposé par la structure même de l'équation de Schrödinger, qui régit l'évolution temporelle des états quantiques et fait intervenir le nombre imaginaire i ($i^2 = -1$). Une fonction d'onde initialement réelle devient donc en général complexe au cours du temps.

Q15. Expliquer la signification physique de $\Psi(x, t)$ et de $|\Psi(x, t)|^2$. Interpréter la condition de normalisation.

$\Psi(x, t)$ est l'amplitude de probabilité de présence de la particule. Elle ne possède pas de signification physique directe, mais son module au carré :

$|\Psi(x, t)|^2 dx$: probabilité de trouver la particule entre x et $x + dx$ à l'instant t .

Condition de normalisation : $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1$

Cette relation traduit la certitude de trouver la particule quelque part dans l'espace

Q16. On pose $\rho(x,t) = |\Psi(x,t)|^2$. Montrer que toute solution de l'équation de Schrödinger vérifie l'équation de continuité : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{J} = 0$

où la densité de courant de probabilité est $\vec{J} = i \frac{\hbar}{2m} (\Psi \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\Psi^*) - \Psi^* \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\Psi))$.

Donner l'interprétation physique de cette équation. Que devient-elle dans le cas stationnaire ?

On part de l'équation de Schrödinger et de son complexe conjugué :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (1) \quad \text{et} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} + V\Psi^* = -i\hbar \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \quad (2)$$

On multiplie (1) par Ψ^* et (2) par Ψ , puis on soustrait :

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} \right) &= i\hbar \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) = i\hbar \frac{\partial (\Psi \cdot \Psi^*)}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right) &= -\frac{\partial J}{\partial x} = i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{avec} \quad J = \frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial J}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \quad \text{Équation de continuité} \end{aligned}$$

Interprétation physique : Analogue à l'équation de continuité de la mécanique des fluides, elle exprime la **conservation locale de la probabilité** : toute variation de la densité de probabilité ρ en un point est due à un flux J entrant ou sortant. La probabilité totale est conservée au cours du temps.

Cas stationnaire : $\Psi(x,t) = \varphi(x) e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$, donc $\rho = |\varphi(x)|^2$ est indépendant de t , et l'équation de continuité donne : $\frac{\partial J}{\partial x} = 0 \Rightarrow J = \text{cte}$ qui ne dépend pas de x .

Le courant de probabilité est **uniforme** (constant dans l'espace) en régime stationnaire.

Q17. Calculer $\vec{J}(x,t)$ pour une fonction d'onde de la forme $\Psi(x,t) = A e^{if(x,t)}$, où f est une fonction réelle de x et t .

$$\begin{aligned} \begin{cases} \Psi(x,t) = A e^{if(x,t)} \\ \Psi^*(x,t) = A^* e^{-if(x,t)} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x} = iA \frac{\partial f}{\partial x} e^{if(x,t)} \\ \frac{\partial \Psi^*(x,t)}{\partial x} = -iA^* \frac{\partial f}{\partial x} e^{-if(x,t)} \end{cases} \\ \Rightarrow J = \frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) &= \frac{\hbar}{m} |A|^2 \frac{\partial f}{\partial x} \\ \Rightarrow J = \frac{\hbar}{m} \rho \frac{\partial f}{\partial x} &\quad \text{où} \quad \rho = |\Psi|^2 = |A|^2 \end{aligned}$$

Q18. Pour une particule libre, quelle relation doit vérifier k et ω pour qu'une onde plane monochromatique $\Psi(x, t) = A.e^{-i(\omega t - kx)}$ soit solution de l'équation de Schrödinger ? En déduire l'énergie E en fonction de ω .
L'onde plane vérifie-t-elle les conditions de normalisation ?

Pour une particule libre ($V = 0$, $E_c = E - V < 0$), on injecte $\Psi(x, t) = A.e^{-i(\omega t - kx)}$ dans l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} (-k^2) \Psi = i\hbar (-i\omega) \Psi \Rightarrow \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \hbar \omega$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{\hbar k^2}{2m} \text{ (Relation de dispersion)}$$

L'énergie totale :

$$E = \hbar \omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

(Cohérent avec la mécanique classique pour une particule libre).

Normalisation : L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |A|^2 dx$ est infinie (**diverge**) : l'onde plane n'est pas normalisable.

En pratique, on construit des paquets d'ondes normalisables par superposition d'ondes planes.

Q19. Calculer la densité de courant de probabilité pour $\Psi(x, t) = A.e^{-i(\omega t - kx)}$, A étant une constante réelle.

$$\Psi(x, t) = A.e^{-i(\omega t - kx)} = A.e^{if(t)} ; f(t) = kx - \omega t$$

$$\text{D'autre part : } J = \frac{\hbar}{m} |A|^2 \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\hbar k}{m} |A|^2 = \frac{p}{m} |A|^2 = v |A|^2$$

Le courant de probabilité est proportionnel à la vitesse de phase et à la densité de probabilité : il représente le flux de particules, analogue à ρv en mécanique des fluides.

Troisième Partie : Réflexion sur une marche de potentiel

On envoie, dans le sens des x croissants, un flux permanent monocinétique de particules de masse m et d'énergie E sur une marche de potentiel définie par :

$$\begin{cases} V(x) = 0 & \text{pour } x < 0 \\ V(x) = V_0 & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$$

Q20. Étudier, dans le cadre de la mécanique classique, le mouvement de la particule selon que $E > V_0$ ou $E < V_0$. Sous quelle condition la particule peut-elle franchir la barrière ?

En mécanique classique, l'énergie mécanique $E = E_c + V$ se conserve. La particule ne peut se trouver dans une région où $E_c = E - V < 0$.

- Si $E > V_0$: Dans la région $x \geq 0$, l'énergie cinétique $E_c = E - V_0 > 0$: la particule **franchit** la barrière et

continue avec une vitesse réduite $v' = \sqrt{\frac{2(E - V_0)}{m}} < v$.

- Si $E < V_0$: $E_c = E - V_0 < 0$ est impossible classiquement. La particule est **totalelement réfléchi**e en $x = 0$ et repart dans le sens $x < 0$.

Cas où $E < V_0$

Q21. Écrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps pour la région $x < 0$. La fonction d'onde $\varphi_1(x)$ est la somme d'une onde incidente d'amplitude A (vers les x croissants) et d'une onde réfléchi e d'amplitude B . Donner l'expression du module du vecteur d'onde k en fonction de E , m et $\hbar$, puis l'expression de $\varphi_1(x)$.

Dans la région $x < 0$ ($V = 0$) : L'équation de Schrödinger stationnaire est :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} = E \varphi_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} + k^2 \varphi_1 = 0 \quad \text{avec} \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} > 0$$

La solution générale est une superposition d'onde incidente et réfléchi e :

$$\varphi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

Q22. Écrire l'équation de Schrödinger pour la région $x > 0$. Montrer que la solution s'écrit $\varphi_2(x) = Ce^{-\gamma x}$. Interpréter cette solution et donner l'expression de γ en fonction des données.

Dans la Région $x > 0$ ($V = V_0 > E$) : L'équation de Schrödinger stationnaire est :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} = (E - V_0) \varphi_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} - \gamma^2 \varphi_2 = 0 \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} > 0$$

La solution générale est de la forme : $Ce^{\gamma x} + De^{-\gamma x}$. La condition de normalisation impose $C = 0$, d'où :

$$\varphi_2(x) = Ce^{-\gamma x}$$

Interprétation : φ_2 est une fonction exponentielle décroissante : la particule **pénètre** dans la zone classiquement interdite sur une profondeur caractéristique $\delta = \frac{1}{\gamma}$. Il n'y a pas de propagation d'énergie (ondes évanescentes).

Q23. Quelles conditions de continuité permettent de raccorder φ_1 et φ_2 en $x = 0$? En déduire les rapports B/A et C/A .

En $x = 0$, la fonction d'onde et sa dérivée sont continues ($\varphi \in C^1$) :

$$\begin{cases} \varphi_1(0) = \varphi_2(0) \\ \varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = C \\ ik(A - B) = -\gamma C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{B}{A} = \frac{\gamma + ik}{\gamma - ik} \\ \frac{C}{A} = \frac{2\gamma}{\gamma - ik} \end{cases}$$

Q24. Calculer $|B/A|^2$. Quelle est sa signification physique ? Quelle différence fondamentale subsiste par rapport à la mécanique classique ?

$$\left| \frac{B}{A} \right|^2 = \frac{|\gamma + ik|^2}{|\gamma - ik|^2} = 1$$

Signification physique : Le coefficient de réflexion est égal à $R = |B/A|^2 = 1$. Toutes les particules incidentes sont donc réfléchies. Bien que la fonction d'onde dans la région interdite ne soit pas nulle, le courant de probabilité y est nul (la fonction d'onde y est réelle), ce qui implique qu'aucun flux de particules (et donc aucune énergie) ne traverse la marche de potentiel.

Différence fondamentale avec la mécanique classique : En mécanique classique, on obtient également une réflexion totale ($R = 1$). Toutefois, contrairement au cas quantique, la particule ne pénètre pas dans la région interdite : elle s'arrête au point où son énergie potentielle devient égale à son énergie totale. En mécanique quantique, la fonction d'onde décroît exponentiellement dans cette région, traduisant une pénétration finie. Ce comportement est à l'origine de l'effet tunnel.

Cas où $E > V_0$

La fonction d'onde solution de l'équation de Schrödinger est :

$$\begin{cases} \varphi(x) = Ae^{ikx} + rAe^{-ikx} & \text{pour } x < 0 \\ \varphi(x) = tAe^{ik_0x} & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

avec $E - V_0 = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m}$ et k donné par la question Q21.

Q25. Écrire les conditions de raccordement en $x = 0$.

En $x = 0$, continuité de φ et de φ' :

$$\begin{cases} A + rA = tA \\ ik(A - rA) = ik_0 tA \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + r = t \\ ik(1 - r) = ik_0 t \end{cases}$$

Q26. Calculer les coefficients t et r en fonction de k et k_0 .

$$\begin{cases} 1 + r = t \\ ik(1 - r) = ik_0 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{k - k_0}{k + k_0} \\ t = \frac{2k}{k + k_0} \end{cases}$$

Q27. Calculer le courant de probabilité $J_1 (x < 0)$ et $J_2 (x > 0)$. Identifier les densités de courants incident J_i , réfléchi J_r et transmis J_t . Définir les coefficients de réflexion $R = |J_r/J_i|$ et de transmission $T = |J_t/J_i|$, les calculer et montrer que $R + T = 1$. Étudier les cas limites $k \rightarrow 0$ et $k \rightarrow \infty$ et comparer aux résultats classiques.

$$\text{Courant de probabilité pour } x < 0 : J_1 = \underbrace{\frac{\hbar k}{m}|A|^2}_{J_i(\text{incident})} - \underbrace{\frac{\hbar k}{m}|rA|^2}_{J_r(\text{réfléchi})} = \frac{\hbar k}{m}|A|^2(1 - |r|^2)$$

$$\text{Courant de probabilité pour } x > 0 : J_2 = J_t = \frac{\hbar k_0}{m}|tA|^2 = \frac{\hbar k_0}{m} \frac{4k^2}{(k + k_0)^2}|A|^2$$

$$\text{Coefficients de réflexion et de transmission : } R = \frac{J_r}{J_i} = |r|^2 = \left(\frac{k - k_0}{k + k_0}\right)^2 ; T = \frac{J_t}{J_i} = \frac{k_0}{k}|t|^2 = \frac{4kk_0}{(k + k_0)^2}$$

$$\text{Vérification : } R + T = \frac{(k - k_0)^2 + 4kk_0}{(k + k_0)^2} = 1$$

Limites :

- $k \rightarrow 0 (E \rightarrow 0) : R \rightarrow 1, T \rightarrow 0$ (réflexion totale).
- $k \rightarrow \infty (E \gg V_0, k \approx k_0) : R \rightarrow 0, T \rightarrow 1$ (transparence totale).

Remarque : En mécanique classique pour $E > V_0$, $T = 1$ toujours (aucune réflexion). En quantique, il existe une réflexion partielle ($R > 0$) même pour $E > V_0$: c'est analogue à la réflexion partielle d'une onde lumineuse sur une interface optique. Ce résultat n'a aucun équivalent classique.

Quatrième Partie : Effet tunnel à travers une barrière de potentiel

On considère un faisceau d'électrons non relativistes de masse m se déplaçant dans le sens des x croissants et heurtant une barrière d'énergie potentielle de hauteur $V_0 > 0$ et d'épaisseur a :

$$\begin{cases} V(x) = V_0 & \text{pour } 0 < x < a \\ V(x) = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Q28. Donner un exemple de système physique réel modélisé par cette barrière de potentiel.

Exemples de systèmes modélisés par une barrière de potentiel rectangulaire :

- Microscope à effet tunnel (*STM*) : vide entre la pointe et l'échantillon.
- Jonction tunnel métal-oxyde-métal (*MOM*) : couche d'oxyde isolant.
- Désintégration α : la particule α traversant la barrière coulombienne du noyau.
- Diode à effet tunnel : électrons franchissant une barrière de bande interdite dans un semiconducteur dopé.

Q29. En mécanique classique, que peut-on conclure quant à la présence d'une particule dans la région $0 < x < a$ lorsque son énergie E est inférieure au potentiel V_0 ?

En mécanique classique, la région $0 < x < a$ est une zone d'énergie potentielle $V_0 > E$: l'énergie cinétique $E_c = E - V_0 < 0$ est impossible. La particule est donc totalement réfléchiée en $x = 0$; elle ne peut en aucun cas pénétrer dans la barrière, ni la franchir.

On se place dans le cadre de la mécanique quantique avec $0 < E < V_0$.

Q30. Montrer que les solutions de l'équation de Schrödinger stationnaire dans chacune des trois régions s'écrivent :

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} & \text{pour } x < 0 \\ \varphi_2(x) = A_2 e^{\gamma x} + B_2 e^{-\gamma x} & \text{pour } 0 < x < a \\ \varphi_3(x) = A_3 e^{ikx} + B_3 e^{-ikx} & \text{pour } x > a \end{cases}$$

Donner les expressions de k et γ en fonction des données.

• Dans la région $x < 0$ ($V = 0, E > 0$) : $\frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} + k^2 \varphi_1 = 0$ avec $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$.

La solution est de la forme : $\varphi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}$

• Dans la région $0 < x < a$ ($V = V_0 > E$) : $\frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} - \gamma^2 \varphi_2 = 0$ avec $\gamma = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$.

La solution est de la forme : $\varphi_2(x) = A_2 e^{\gamma x} + B_2 e^{-\gamma x}$

• Dans la région $x > a$ ($V = 0$) : $\frac{d^2 \varphi_3}{dx^2} + k^2 \varphi_3 = 0$.

La solution est de la forme : $\varphi_3(x) = A_3 e^{ikx} + B_3 e^{-ikx}$

Q31. Justifier que pour la situation étudiée (onde incidente venant de $-\infty$), la fonction d'onde dans la région $x > a$ ne comprend qu'un seul terme.

Dans la région $x > a$, le terme $B_3 e^{-ikx}$ représente une onde se propageant dans le sens des x décroissants (vers la gauche). Physiquement, une telle onde ne peut provenir que d'une source ou d'une réflexion à droite de la barrière. Puisque le problème ne comporte aucune source à droite (le potentiel est nul pour $x > a$ et s'étend à l'infini sans obstacle), il ne peut y avoir d'onde réfléchie dans cette région :

$$B_3 = 0 ; \quad \varphi_3 = A_3 e^{ikx}$$

Q32. Écrire les quatre conditions de raccordement en $x = 0$ et en $x = a$.

- Continuité de φ et φ' en $x = 0$:
$$\begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \\ ik(A_1 - B_1) = \gamma(A_2 - B_2) \end{cases}$$
- Continuité de φ et φ' en $x = a$:
$$\begin{cases} A_2 e^{\gamma a} + B_2 e^{-\gamma a} = A_3 e^{ika} \\ \gamma(A_2 e^{\gamma a} - B_2 e^{-\gamma a}) = ikA_3 e^{ika} \end{cases}$$

Q33. On définit les coefficients de réflexion $R' = |B_1/A_1|^2$ et de transmission $T' = |A_3/A_1|^2$. Les expressions de R' et T' s'écrivent :

$$\begin{cases} R' = \frac{(\gamma^2 + k^2)^2 sh^2(\gamma a)}{4\gamma^2 k^2 + (\gamma^2 + k^2)^2 sh^2(\gamma a)} \\ T' = \frac{4\gamma^2 k^2}{4\gamma^2 k^2 + (\gamma^2 + k^2)^2 sh^2(\gamma a)} \end{cases}$$

Étudier la variation de T' en fonction de E . Discuter l'influence de V_0 et a sur T' . On pourra poser $X = E/V_0$

Variation de T' en fonction de E : En posant $X = \frac{E}{V_0} \in [0, 1[$,

on a $k^2 = 2mE/\hbar^2 = 2mV_0 X/\hbar^2$ et $\gamma^2 = 2m(V_0 - E)/\hbar^2 = 2mV_0(1 - X)/\hbar^2$, donc :

$$\frac{(\gamma^2 + k^2)^2}{4\gamma^2 k^2} = \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} = \frac{1}{4X(1 - X)}$$

T' est une fonction croissante de E : plus la particule est énergétique, plus elle traverse facilement la barrière. $T' \rightarrow 0$ quand $E \rightarrow 0$; $T' \rightarrow 1$ quand $E \rightarrow V_0$.

Influence de V_0 et a : T' décroît quand V_0 augmente (barrière plus haute) ou quand a augmente (barrière plus large), car γa croît dans les deux cas et $sh(\gamma a)$ augmente.

Q34. Déterminer les expressions approchées de la transmission T' dans le cas d'une barrière mince, puis très épaisse. Que devient la transparence lorsque l'énergie cinétique des particules incidentes tend vers V_0 ? Comparer avec les prévisions de la mécanique classique.

• Barrière mince ($\gamma a \ll 1$) : $sh(\gamma a) \approx \gamma a$, donc :

$$T' \approx \frac{4\gamma^2 k^2}{4\gamma^2 k^2 + (\gamma^2 + k^2)^2 (\gamma a)^2} = \frac{1}{1 + \frac{(\gamma^2 + k^2)^2}{4\gamma^2 k^2} (\gamma a)^2} \approx 1 - \frac{(\gamma^2 + k^2)^2}{4\gamma^2 k^2} (\gamma a)^2 \xrightarrow{\gamma a \rightarrow 0} 1$$

• Barrière très épaisse ($\gamma a \gg 1$) : $sh(\gamma a) \approx \frac{e^{\gamma a}}{2}$, donc : $T' = \frac{4\gamma^2 k^2}{(\gamma^2 + k^2)^2 \frac{e^{2\gamma a}}{4}} = \frac{16\gamma^2 k^2}{(\gamma^2 + k^2)^2} e^{-2\gamma a} \ll 1$

Limite $E \rightarrow V_0$: $\gamma \rightarrow 0$, $sh(\gamma a) \approx \gamma a \ll 1$, donc $T' \rightarrow 1$: la barrière devient transparente.

Remarque : En mécanique classique, $T'_{classique} = 0$ pour tout $E < V_0$, quels que soient V_0 et a . La mécanique quantique prédit $T' > 0$: c'est l'effet tunnel.

Q35. Dans le cas limite $\gamma a \gg 1$, étudier le comportement de T' en fonction de a , m et $(V_0 - E)$.

Application numérique : $V_0 = 2 \text{ eV}$, $a = 1 \text{ nm}$, $E = 1 \text{ eV}$. Calculer T' pour un électron puis pour un proton de même énergie. Comparer et conclure. Vérifier que l'hypothèse $\gamma a \gg 1$ est bien satisfaite.

Dans le cas limite $\gamma a \gg 1$: $T' \approx \frac{16\gamma^2 k^2}{(\gamma^2 + k^2)^2} e^{-2\gamma a}$

Le facteur $\frac{16\gamma^2 k^2}{(\gamma^2 + k^2)^2}$ varie lentement devant $e^{-2\gamma a}$. Le comportement dominant est :

$$T' \propto e^{-2\gamma a} = e^{-\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}}$$

La transmission décroît exponentiellement avec :

- l'épaisseur a de la barrière,
- la racine carrée masse m de la particule,
- la racine carrée de l'excès de potentiel $(V_0 - E)$.

Application numérique : $\gamma = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$; $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \gamma$ car $V_0 = 2E$

• Pour l'électron ($m = m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$) :

$$k_e = \gamma_e = 5,12 \times 10^9 \text{ m}^{-1} ; \gamma_e a = 5,12 \gg 1 : \text{hypothèse vérifiée. } T'_e = \frac{16\gamma_e^2 k_e^2}{(\gamma_e^2 + k_e^2)^2} e^{-2\gamma_e a} \approx 1,43 \times 10^{-4}$$

• Pour le proton ($m = m_p = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$) :

$$k_p = \gamma_p = \gamma_e \sqrt{\frac{m_p}{m_e}} = 2,20 \times 10^{11} \text{ m}^{-1} ; \gamma_p a = 220 \gg 1 : \text{hypothèse très bien vérifiée.}$$

$$T'_p = \frac{16\gamma_p^2 k_p^2}{(\gamma_p^2 + k_p^2)^2} e^{-2\gamma_p a} \approx 10^{-191}$$

Conclusion : Le rapport $T'_e / T'_p \approx 10^{187}$. La masse de la particule est le facteur déterminant : l'effet tunnel est pratiquement nul pour le proton (et plus encore pour des particules lourdes), et significatif pour les électrons. C'est pourquoi le STM fonctionne avec des électrons.

Q36. Calculer le courant de probabilité dans chacune des régions $x < 0$, $0 < x < a$ et $x > a$. Retrouver $R' + T' = 1$ et en donner le sens physique.

- Dans la région $x < 0$: $\varphi_1 = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}$; $J_1 = \frac{\hbar k}{m} (|A_1|^2 - |B_1|^2) = J_i (1 - R')$
- Dans la région $0 < x < a$: $\varphi_2 = A_2 e^{\gamma x} + B_2 e^{-\gamma x}$; $J_2 = \frac{i\hbar}{2m} \left(\varphi_2 \frac{d\varphi_2^*}{dx} - \varphi_2^* \frac{d\varphi_2}{dx} \right) = \frac{2\hbar\gamma}{m} \text{Im}(A_2 \cdot B_2^*) = cte$
- Dans la région $x > 0$: $\varphi_3 = A_3 e^{ikx}$; $J_3 = \frac{\hbar k}{m} |A_3|^2 = J_i T'$

La conservation du courant de probabilité $J_1 = J_2 = J_3$ donne : $J_i (1 - R') = J_i T' \Rightarrow R' + T' = 1$

Sens physique : $R' + T' = 1$ exprime la conservation de la probabilité : le nombre de particules est conservé (il n'y a ni création ni destruction de particules dans le processus tunnel).

Q37. Comment la fonction d'onde dans chacune des trois régions est-elle modifiée si la particule possède une énergie $E > V_0$?

Pour $E > 0$, la quantité $E - V_0 > 0$ dans la région $0 < x < a$, le nombre d'onde y devient réel :

$$k_0 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar} > 0.$$

Les fonctions d'onde deviennent :

$$\varphi_1 = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}, \quad \varphi_2 = A_2 e^{ik_0 x} + B_2 e^{-ik_0 x}, \quad \varphi_3 = A_3 e^{ikx}$$

La solution dans la barrière est maintenant oscillante (onde progressive) et non plus évanescence. On retrouve un coefficient de transmission $T' < 1$ (réflexions aux deux interfaces), mais avec des résonances de transmission $T' = 1$ exactement lorsque $k_0 a = n\pi$ ($n \in \mathbb{N}^*$), analogue aux couches anti-reflet en optique.

Cinquième Partie : Transferts thermiques dans les structures nanométriques

La maîtrise de la chaleur dissipée est un enjeu majeur dans la conception des microscopes à effet tunnel et, plus généralement, dans la nano-électronique. Cette partie étudie les trois modes de transfert thermique (**conduction**, **convection** et **rayonnement**) dans des géométries simplifiées inspirées d'un dispositif STM.

Conduction thermique dans une paroi composite

La pointe du *STM* est fixée à un support métallique de longueur $L_1 = 5 \text{ mm}$ et de section $S = 1 \text{ mm}^2$, en cuivre. Ce support est collé à une platine en verre de longueur $L_2 = 2 \text{ mm}$ et de section identique S . L'extrémité chaude (côté électronique) est à la température $T_1 = 320 \text{ K}$ et l'extrémité froide (côté pointe) à $T_2 = 300 \text{ K}$. On suppose le régime stationnaire et la conduction unidimensionnelle.

Q38. Rappeler la loi de Fourier en régime stationnaire pour la densité de flux thermique $\vec{J}_{th}$ à travers un matériau de conductivité λ .

La loi de Fourier stipule que le vecteur densité de flux thermique à travers un matériau de conductivité thermique λ est proportionnel et oppose au gradient de température :

$$\vec{J}_{th} = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T) \text{ soit en 1D } \vec{J}_{th} = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx} \vec{u}_x$$

Q39. Définir la résistance thermique de conduction R_{th} d'un barreau homogène de longueur L , de section S et de conductivité λ . Calculer les résistances thermiques $R_{th,Cu}$ et $R_{th,verre}$ de chaque couche.

En régime stationnaire et 1D, le flux thermique $\Phi = J_{th} \cdot S$ est constant dans chaque couche.

$$\text{Intégrant la loi de Fourier : } \Phi = \frac{\lambda S}{L} (T_{chaud} - T_{froid}) = \frac{\Delta T}{R_{th}} ; R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$$

Application numérique :

$$R_{th,Cu} = \frac{L_1}{\lambda_{Cu} S} = 12,99 \text{ K.W}^{-1} ; R_{th,verre} = \frac{L_2}{\lambda_{verre} S} = 1818,18 \text{ K.W}^{-1}$$

Q40. En modélisant le problème par un circuit thermique équivalent, calculer le flux de chaleur Φ traversant la paroi composite. En déduire la température $T_{interface}$ à la jonction cuivre-verre.

Les deux couches sont en série (même flux les traverse) :

$$R_{th,tot} = R_{th,Cu} + R_{th,verre} = 1831,17 \text{ K.W}^{-1} ; \Phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{th,tot}} \approx 10,92 \text{ mW}$$

Température à l'interface :

$$T_1 - T_{interface} = \Phi \cdot R_{th,Cu} \Rightarrow T_{interface} = T_1 - \Phi \cdot R_{th,Cu} = 319,86 \text{ K}$$

Q41. Quel matériau constitue le « goulot d'étranglement » thermique ? Justifier qualitativement pourquoi cela est souhaitable pour isoler thermiquement la pointe STM.

$R_{th,verre} / R_{th,Cu} \approx 140$: le verre est le **goulot d'étranglement** thermique. Presque toute la chute de température se produit dans le verre ($\Delta T_{verre} = 19,86 K$ contre $0,14 K$ dans le cuivre).

Intérêt pour le STM : La haute résistance thermique du verre isole la pointe des fluctuations de température de l'électronique. Une dérive thermique de la pointe entraînerait une variation de la distance pointe-échantillon et donc un signal parasite. Minimiser la conduction vers la pointe améliore la stabilité et la résolution du STM.

Ailette de refroidissement par convection forcée

Pour dissiper la chaleur de l'électronique embarquée, on dispose d'une ailette cylindrique en aluminium de longueur $L = 30 mm$, de rayon $r = 0,1 mm$ et de conductivité λ_{Al} . L'extrémité encastree est maintenue à $T_b = 340 K$. L'aillette est plongée dans un flux d'air à $T_\infty = 300 K$, avec un coefficient de convection $h = 80 W.m^{-2}.K^{-1}$. On suppose l'extrémité libre adiabatique.

On pose $\theta(x) = T(x) - T_\infty$ et $m^2 = \frac{2h}{\lambda_{Al} r}$.

Q42. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(x)$ à partir d'un bilan d'énergie sur un élément dx de l'aillette.

Le bilan thermique pour l'élément de l'aillette situé entre x et $x + dx$, s'écrit en régime stationnaire : n :

$$\underbrace{\lambda_{Al} \cdot \pi r^2 \cdot \frac{dT}{dx} \Big|_x}_{\text{flux entrant}} - \underbrace{\lambda_{Al} \cdot \pi r^2 \cdot \frac{dT}{dx} \Big|_{x+dx}}_{\text{flux sortant}} + \underbrace{h \cdot 2\pi r \cdot (T - T_\infty)}_{\text{convection}} = 0$$

En développant au premier ordre : $\lambda_{Al} \cdot \pi r^2 \frac{d^2 T}{dx^2} dx = h \cdot 2\pi r \cdot (T - T_\infty)$

Soit : $\frac{d^2 \theta}{dx^2} - m^2 \theta = 0$, $m^2 = \frac{2h}{\lambda_{Al} r}$

Q43. Donner la solution générale de cette équation et exprimer $\theta(x)$ en appliquant les conditions aux limites (en $x = 0 : T = T_b$; en $x = L : \frac{dT}{dx} = 0$).

La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$\theta(x) = C_1 ch(mx) + C_2 sh(mx)$$

Conditions aux limites :

- en $x = 0 : \theta(0) = \theta_b = T_b - T_\infty \Rightarrow C_1 = \theta_b$
- en $x = L : \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = 0$ (extrémité adiabatique)

$$\Rightarrow C_1 m sh(mL) + C_2 m ch(mL) = 0 \Rightarrow C_2 = -\theta_b \frac{sh(mL)}{ch(mL)}$$

$$\theta(x) = \theta_b \left(ch(mL) - \frac{sh(mL)}{ch(mL)} sh(mx) \right)$$

$$\Rightarrow \theta(x) = \theta_b \frac{ch(m(L-x))}{ch(mL)}$$

Q44. Calculer numériquement le paramètre m . En déduire la température à l'extrémité libre $T(L)$.

Calcul de m : $m = \sqrt{\frac{2h}{\lambda_{Al} r}}$; A.N. : $m \approx 88,35 m^{-1}$; $mL \approx 2,65$

Température à l'extrémité libre : $T(L) = T_\infty + \theta_b \frac{ch(0)}{ch(mL)} = T_\infty + \frac{\theta_b}{ch(mL)}$; A.N. : $T(L) = 305,62 K$

Q45. Exprimer le flux de chaleur total évacué par l'ailette $\Phi_{ailette}$. Calculer sa valeur numérique. Déterminer l'expression du flux évacué par l'ailette si elle était parfaite (si toute la surface de l'ailette était à la température T_b). Quelle est le rendement de l'ailette ?

Le flux en $x = 0$ est conduit depuis l'encastrement vers l'ailette :

$$\Phi_{ailette} = -\lambda_{Al} \pi r^2 \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0}$$

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} = -\theta_b m \frac{sh(m(L-x))}{ch(mL)} \Big|_{x=0} = -\theta_b m \frac{sh(m(L))}{ch(mL)} = -\theta_b m th(mL)$$

$$\Phi_{ailette} = \lambda_{Al} \pi r^2 m \theta_b th(mL) = \sqrt{2\pi^2 r^3 \lambda_{Al} h} \theta_b th(mL) ; \text{A.N. : } \Phi_{ailette} = 22,53 \text{ mW}$$

Le flux évacué par l'ailette si elle était parfaite est : $\Phi_{max} = h \cdot 2\pi r L \cdot \theta_b$

$$\text{Le rendement de l'ailette est : } Rd_{ailette} = \frac{\sqrt{2\pi^2 r^3 h \lambda_{Al}} \theta_b th(mL)}{2\pi r L h \theta_b} = \frac{th(mL)}{mL} ; \text{A.N. : } 37,4 \%$$

Q46. On multiplie le coefficient de convection par 4 ($h' = 320 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$). Quel est l'effet sur $T(L)$ et sur $\Phi_{ailette}$? Conclure sur l'intérêt de l'agitation du fluide.

Avec $h' = 4h = 320 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$; $h' = 4h = 320 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$; $m' = 2m = 176,69 \text{ m}^{-1}$; $m'L \approx 5,301$

$$T'(L) = T_\infty + \frac{\theta_b}{ch(m'L)} ; \text{A.N. : } T'(L) = 300,40 \text{ K}$$

L'extrémité est plus froide ($305,62 \text{ K} \rightarrow 300,40 \text{ K}$), ce qui est attendu.

$$\Phi'_{ailette} = \sqrt{2\pi^2 r^3 \lambda_{Al} h'} \theta_b th(m'L) ; \text{A.N. : } \Phi'_{ailette} = 45,52 \text{ mW}$$

Le flux est multiplié par $\approx 2,7$

Remarque : Doubler h ne double pas le flux car le rendement de l'ailette diminue. L'agitation du fluide est néanmoins très bénéfique pour le refroidissement : ici un facteur 4 sur h multiplie le flux par ≈ 2 seulement.

Rayonnement thermique et échange radiatif

La platine chauffante du *STM* peut être considérée comme un corps gris d'émissivité $\varepsilon_1 = 0,85$ de surface $A_1 = 4 \text{ cm}^2$, à la température $T_1 = 340 \text{ K}$. Elle rayonne vers une paroi environnante (boîtier métallique) assimilée à un corps noir de surface $A_2 \gg A_1$ à la température $T_2 = 300 \text{ K}$.

Q47. Rappeler la loi de Stefan-Boltzmann pour la puissance émise par un corps gris de surface A , d'émissivité ε et de température T .

La puissance rayonnée par un corps gris de surface A , d'émissivité ε et de température T est :

$$P_{\text{ray}} = \varepsilon \sigma S T^4$$

Un corps noir ($\varepsilon = 1$) vérifie la loi de Stefan-Boltzmann exacte. Pour un corps gris, $\varepsilon < 1$ tient compte de l'émission réelle inférieure à celle du corps noir.

Q48. Calculer la puissance nette échangée par rayonnement entre la platine et le boîtier. Commenter l'ordre de grandeur obtenu par rapport au flux calculé en Q40.

La puissance nette échangée (platine rayonne, boîtier rayonne sur la platine) :

$$\Phi_{\text{rad}} = \varepsilon_1 \sigma A_1 (T_1^4 - T_2^4)$$

L'absorption par la petite surface $A_1 \ll A_2$ d'un rayonnement de corps noir à T_2 est $\varepsilon_1 \sigma A_1 T_2^4$.

A.N. : $\Phi_{\text{rad}} = 101,5 \text{ mW}$

Remarque. Ce flux radiatif ($\approx 100 \text{ mW}$) est du même ordre que la puissance dissipée $P_0 = 50 \text{ mW}$ et environ 10 fois supérieur au flux conduit ($\approx 11 \text{ mW}$). Le rayonnement joue donc un rôle important dans ce système.

Q49. On définit un coefficient de transfert radiatif linéarisé h_r tel que $\Phi_{\text{rad}} = h_{\text{rad}} A_1 (T_1 - T_2)$.

Montrer que : $h_r = \varepsilon \sigma (T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2)$. Calculer numériquement h_r et comparer à h . À quelle température le rayonnement deviendrait-il dominant devant la convection ?

On factorise : $T_1^4 - T_2^4 = (T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2)(T_1 - T_2)$

$$\Phi_{\text{rad}} = \varepsilon \sigma A_1 (T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2)(T_1 - T_2) = h_{\text{rad}} A_1 (T_1 - T_2) ; \quad h_{\text{rad}} = \varepsilon \sigma (T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2)$$

A.N. : $h_r \approx 6,34 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$

Comparaison : $h_r \approx 6,34 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ contre $h \approx 80 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$. La convection est ici environ 13 fois plus efficace que le rayonnement.

Le rayonnement deviendrait dominant devant la convection pour des températures de l'ordre de 1000 K , bien au-delà des températures de fonctionnement d'un *STM*.

Synthèse : résistance thermique totale et bilan

On considère un modèle simplifié du système complet. La chaleur générée par l'électronique (puissance $P_0 = 50 \text{ mW}$) est dissipée simultanément par :

- conduction à travers la paroi composite,
- convection via l'ailette,
- rayonnement vers le boîtier.

On suppose que les trois mécanismes agissent en parallèle depuis une surface commune à la température T_s (inconnue) vers un environnement à $T_\infty = 300 \text{ K}$.

Q50. Modéliser le système par un circuit thermique en précisant les trois résistances équivalentes $R_{th,cond}$,

$R_{th,conv}$ et $R_{th,rad}$ (exprimer $R_{th,conv} = \frac{\theta_b}{\Phi_{ailette}}$ et $R_{th,rad} = \frac{T_s - T_\infty}{\Phi_{rad}}$).

Les trois résistances thermiques :

$$R_{th,cond} = R_{th,tot,paroi} = 1831,17 \text{ K.W}^{-1}$$

$$R_{th,conv} = \frac{\theta_b}{\Phi_{ailette}} = \frac{40}{22,53 \times 10^{-3}} \approx 1775,2 \text{ K.W}^{-1}$$

$$R_{th,rad} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{rad}} = \frac{T_s - T_\infty}{\Phi_{rad}} \approx 394,2 \text{ K.W}^{-1}$$

Le circuit thermique équivalent est : source de puissance P_0 , reliée à $R_{th,cond}$, $R_{th,conv}$ et $R_{th,rad}$ en parallèle vers T_∞ .

Q51. Montrer que la résistance thermique totale s'écrit : $\frac{1}{R_{th,tot}} = \frac{1}{R_{th,cond}} + \frac{1}{R_{th,conv}} + \frac{1}{R_{th,rad}}$.

En parallèle, les flux s'additionnent pour une même différence de température :

$$P_0 = \Phi_{cond} + \Phi_{conv} + \Phi_{rad} = \frac{T_s - T_\infty}{R_{th,cond}} + \frac{T_s - T_\infty}{R_{th,conv}} + \frac{T_s - T_\infty}{R_{th,rad}} = \frac{T_s - T_\infty}{R_{th,tot}}$$

avec :

$$\frac{1}{R_{th,tot}} = \frac{1}{R_{th,cond}} + \frac{1}{R_{th,conv}} + \frac{1}{R_{th,rad}}$$

$$\text{A.N. : } \frac{1}{R_{th,tot}} = \frac{1}{1831,17} + \frac{1}{1775,19} + \frac{1}{394,22} = 3,646 \times 10^{-3} \text{ W.K}^{-1} \text{ soit } R_{th,tot} = 274,3 \text{ K.W}^{-1}$$

Q52. En supposant que h_r et les résistances sont connues, exprimer la température de surface T_s en régime permanent en fonction de P_0 , T_∞ et $R_{th,tot}$.

$$P_0 = \frac{T_s - T_\infty}{R_{th,tot}} \Rightarrow T_s = T_\infty + R_{th,tot} P_0$$

A.N. : $T_s = 313,71 K$

Q53. Quel mécanisme de dissipation est prépondérant dans ce système ? Proposer une amélioration de la conception pour abaisser T_s de $10 K$.

Le rayonnement est le mécanisme dominant (≈ 70 % du flux total), devant la convection (15,5 %) et la conduction (15 %).

Proposition d'amélioration pour abaisser T_s de 10 K :

Pour obtenir $T_{S,cible} = 303,71 K$, il faut $R_{th,tot} \leq \frac{303,71 - 300}{0,05} = 74,3 K.W^{-1}$, soit une réduction d'un facteur $\approx 3,7$ par rapport à la valeur actuelle.

Le levier le plus efficace est le rayonnement. Quelques pistes :

- Augmenter l'émissivité ε_1 ou augmenter la surface A_1
- Ajouter plusieurs ailettes en parallèle
- Augmenter l'émissivité de la platine (revêtement noir).
- Utiliser un fluide caloporteur à la place de l'air (h plus élevé).

Q54. Discuter qualitativement l'effet d'une augmentation de la fréquence de balayage du *STM* (et donc d'une puissance dissipée plus grande) sur la stabilité thermique de la pointe. Quels paramètres physiques permettent de minimiser la dérive thermique ?

Une fréquence de balayage plus élevée augmente P_0 , donc T_s (si $R_{th,tot}$ est inchangé). Une hausse de T_s entraîne une dilatation thermique de la pointe et du support, modifiant la distance pointe-échantillon et brouillant l'image.

Paramètres physiques à optimiser :

- Faible résistance thermique totale (dissipation efficace).
- Faible coefficient de dilatation thermique des matériaux de la pointe (invar, céramiques).
- Fonctionnement à T stabilisée (régulation active).
- Réduction de la puissance dissipée par l'électronique (circuits faible consommation).

Remarque : Le STM à haute résolution opère souvent en enceinte thermiquement régulée ou sous vide, où la convection est absente et le rayonnement réduit, garantissant une dérive thermique inférieure à 0,1 pm/minute.

— Fin de l'épreuve —

