

PROBLÈME 2 : DUALITÉ ONDE-CORPUSCULE

En octobre 1874, le jeune Max Planck s'inscrit à l'université de Munich pour y étudier les sciences. Il a alors 16 ans. Quelques années plus tard, Max Planck reçoit le prix Nobel de physique en 1918 « pour avoir fondé la mécanique quantique ». Dans sa thèse de doctorat soutenue en 1924, Louis de Broglie postulait que toute particule de quantité de mouvement p avait des propriétés ondulatoires et que l'on pouvait lui associer une longueur d'onde donnée par la relation qui porte son nom $\lambda = \frac{h}{p}$ avec h la constante de Planck.

Depuis, plus de 120 prix Nobel ont été attribués pour des découvertes relatives au monde de la physique quantique : ceci souligne la vitalité et l'importance de ce domaine de la physique.

Les phénomènes quantiques qui apparaissent à l'échelle microscopique sont parfois difficiles à appréhender car ils ne correspondent pas à notre intuition naturelle fondée sur notre expérience du monde macroscopique. À la base de leur compréhension se trouve l'idée de dualité onde-particule et la notion d'onde de matière.

L'objet de ce problème est d'étudier quelques expériences qui ont mis en évidence ces deux notions :

- interférences d'atomes de néon froid en 1992 ;
- expérience de Davisson et Germer en 1927 ;
- interférences de molécules de fullerènes (molécules composées de 60 atomes de carbone) en 2003

Données

- Nombre d'Avogadro : $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- Constante de Planck : $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ Js}$
- Accélération de la pesanteur : $g = 9,8 \times 10^{-1} \text{ m.s}^{-2}$
- Masse d'un électron : $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
- Charge élémentaire : $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
- Masse molaire du néon : $M(\text{Ne}) = 20 \text{ g.mol}^{-1}$
- Masse molaire du carbone : $M(\text{C}) = 12 \text{ g.mol}^{-1}$

Partie I : Interférences d'atomes de néon froid

En 1992, une équipe japonaise a réalisé une expérience d'interférences atomiques. Le dispositif expérimental utilise des atomes de néon piégés et refroidis par laser à une température de $2,5 \text{ mK}$ de manière à minimiser leur agitation thermique moyenne. Lorsque ces atomes quittent le piège, ils tombent dans le champ de pesanteur et sont alors en chute libre. Le piège est situé à une hauteur $\ell = 76 \text{ mm}$ au-dessus de deux fentes d'Young de largeur $b = 2,0 \mu\text{m}$ séparées de la distance $a = 6 \mu\text{m}$. Un écran MPC (Microchannel Plate Detector) situé à la distance $D = 113 \text{ mm}$ de la double fente détecte les atomes de néon avec une résolution de l'ordre de $20 \mu\text{m}$.

On note m^* la masse d'un atome de néon.

1. Comment se manifestent sur l'écran d'observation les caractères corpusculaires d'une part et ondulatoire d'autre part des atomes de néon ?

2.a. Calculer la vitesse v_f avec laquelle les atomes de néon atteignent les fentes de Young (on supposera leur vitesse initiale négligeable).

2.b. En déduire la valeur de la longueur d'onde de de Broglie λ associée aux atomes de néon au niveau des fentes de Young. Pourquoi les atomes de néon doivent-ils être traités comme un objet quantique ?

2.c. Pourquoi est-il plus difficile de réaliser une telle expérience avec des atomes plutôt qu'avec des électrons ?

Pourquoi utilise-t-on des atomes « froids » ?

3. Estimer la largeur de la tache de diffraction pour un atome diffracté par une des fentes et comparer à la résolution sur l'écran MPC.

Sur la figure 7, S_1 et S_2 représentent les positions des deux fentes dans le plan d'étude perpendiculaire aux fentes supposées infiniment fines. Soit un point M du plan d'observation repéré par son abscisse x . L'écran est placé loin des fentes à une distance D grande devant a et x . On s'intéresse à l'interférence en M des ondes de matière ayant traversé chacune des deux fentes.

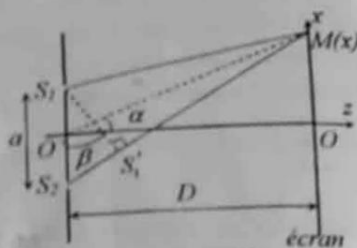


Figure 7

4.a. Montrer que $S_1M = D + \frac{(a-2x)^2}{8D}$ et $S_2M = D + \frac{(a+2x)^2}{8D}$ à l'ordre le plus bas non nul en $\frac{2x \pm a}{2D}$.

On suppose que la longueur d'onde de de Broglie λ des atomes de néon reste constante après la traversée des fentes de Young. Déterminer en fonction de λ , D , a et x le déphasage $\Delta\varphi$ entre les ondes interférant au point M.

4.b. Déterminer l'expression de l'interfrange théorique i_{th} et calculer sa valeur.

5. En réalité, le calcul de l'interfrange est beaucoup plus complexe dans les conditions expérimentales citées et une étude plus approfondie donne l'expression suivante pour la même interfrange, notée i'_{th} :

$$i'_{th} = \frac{h}{m \cdot v_f} \frac{2D}{a} \frac{\sqrt{1+\alpha}-1}{\alpha} \text{ avec } \alpha = \frac{2gD}{v_f^2}$$

5.a. Quelle est la dimension du coefficient α ? Quelles grandeurs compare ce coefficient ?

5.b. Montrer que si $\alpha \ll 1$, on retrouve l'expression de la question 4.b. Commenter une telle approximation et indiquer la raison de la correction de l'interfrange.

Partie II : Expérience de Davisson et Germer : diffraction de électrons

L'expérience de Davisson et Germer est historiquement la première de la série qui prouve que les électrons ont un comportement ondulatoire, comme la lumière ou les rayons X. Elle permet aussi de vérifier quantitativement la validité de la relation de de Broglie. En bombardant une cible de nickel monocristallin par des électrons monocinétiques, Davisson et Germer ont observé un phénomène de diffraction électronique. Les électrons sont diffractés par la cible principalement dans une direction privilégiée.

On modélise le canon à électron utilisé dans l'expérience de Davisson et Germer par deux armatures de potentiel V_1 et V_2 soumises à une différence de potentiel $U = V_1 - V_2$ et séparées par une distance d (figure 8).

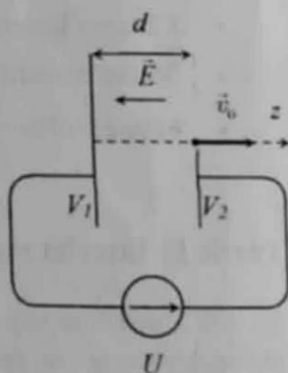


Figure 8

On s'intéresse tout d'abord au champ créé par une seule armature assimilée à un plan infini chargé uniformément. Soit σ sa densité surfacique de charge supposée positive et indépendante du temps.

6. Déterminer la direction du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ au point M. De quelle(s) variable(s) dépend(ent) ce champ ?

7. Quelle relation existe-t-il entre $E(z)$ et $E(-z)$? Justifier.

8. Montrer que le champ électrostatique créé par cette distribution s'écrit :

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

Le canon à électron peut ainsi être modélisé par l'association de deux plans infinis de charges opposées $+\sigma$ et $-\sigma$ placés respectivement à la cote $\frac{d}{2}$ et $-\frac{d}{2}$.

9. Dédurre du résultat de la question précédente l'expression du champ électrostatique en tout point de l'espace.

10. Montrer que l'énergie potentielle électrostatique d'une particule chargée de charge q placée entre les armatures s'écrit : $\mathcal{E}_p = qV(z) + K$, où $V(z)$ est le potentiel électrostatique et K est une constante arbitraire que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Un électron de masse m_e de charge $-e$ est placé à l'armature négative de potentiel V_1 . On supposera que cet électron est initialement immobile. L'application de la différence de potentiel $U = V_2 - V_1 = 54V$ permet d'accélérer cet électron qui atteint une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_z$ au niveau de l'armature positive de potentiel V_2 . Il est ensuite éjecté à travers un trou percé dans cette dernière.

11. Calculer v_0 en fonction de U , m et e . Doit-on se placer dans le cadre de la mécanique relativiste ?

12. Déterminer la valeur numérique de la longueur d'onde de de Broglie associée aux électrons de vitesse v_0 . Commenter cette valeur.

Partie III : Interférences de molécules de fullerène

En 1999, des chercheurs de l'université de Vienne montrent que la dualité onde-particule s'applique également à des molécules de telles que le fullerène C_{60} .

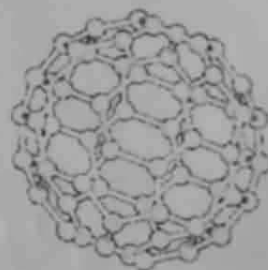


Figure 9

Le réseau utilisé est un réseau de fentes fines. On désire retrouver tout d'abord la condition d'interférences constructives, aussi appelée formule des réseaux.

Soit le cas général de rayons lumineux arrivant depuis la source S avec une incidence θ_0 sur le réseau et émergeant avec un angle θ vers un point M de l'écran repéré par son abscisse x . On suppose que le point M est infiniment éloigné et on se place dans un milieu d'indice $n=1$.

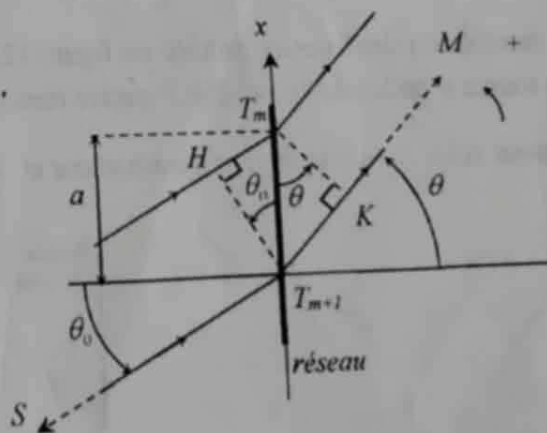
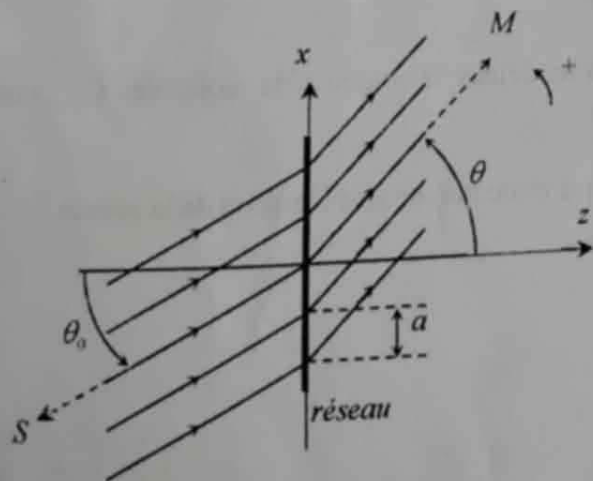


Figure 10

13. À l'aide de la figure 10, déterminer la différence de marche δ entre deux ondes passant par deux fentes du réseau.

l'on ne cherchera pas à déterminer.

Un électron de masse m_e de charge $-e$ est placé à l'armature négative de potentiel V_1 . On supposera que cet électron est initialement immobile. L'application de la différence de potentiel $U = V_2 - V_1 = 54V$ permet d'accélérer cet électron qui atteint une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ au niveau de l'armature positive de potentiel V_2 . Il est ensuite éjecté à travers un trou percé dans cette dernière.

11. Calculer v_0 en fonction de U , m et e . Doit-on se placer dans le cadre de la mécanique relativiste ?
12. Déterminer la valeur numérique de la longueur d'onde de de Broglie associée aux électrons de vitesse v_0 . Commenter cette valeur.

Partie III : Interférences de molécules de fullerène

En 1999, des chercheurs de l'université de Vienne montrent que la dualité onde-particule s'applique également à des molécules de telles que le fullerène C_{60} .

Le réseau utilisé est un réseau de fentes fines. On désire retrouver tout d'abord la condition d'interférences constructives, aussi appelée formule des réseaux.

Soit le cas général de rayons lumineux arrivant depuis la source S avec une incidence θ_0 sur le réseau et émergeant avec un angle θ vers un point M de l'écran repéré par son abscisse x . On suppose que le point M est infiniment éloigné et on se place dans un milieu d'indice $n=1$.

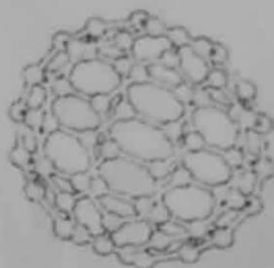


Figure 9

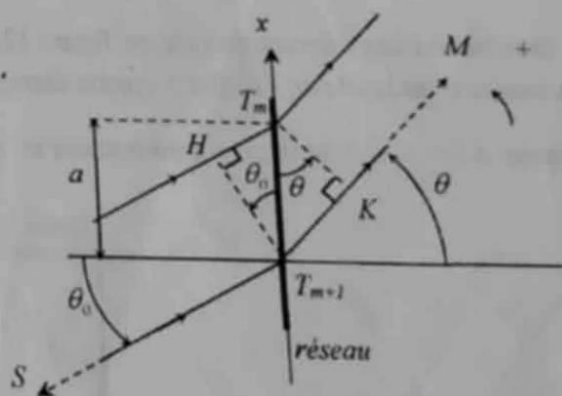
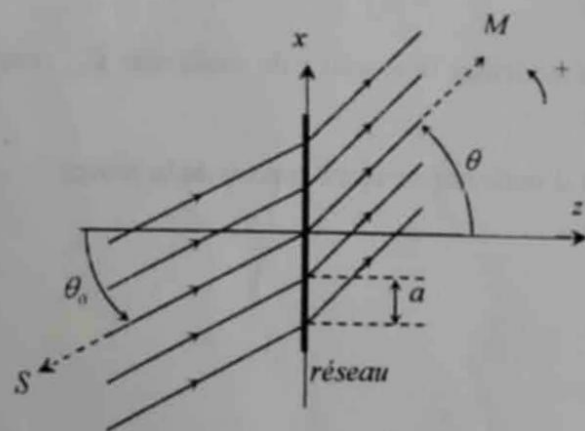


Figure 10

13. À l'aide de la figure 10, déterminer la différence de marche δ entre deux ondes passant par deux fentes consécutives T_m et T_{m+1} . En déduire la formule fondamentale des réseaux

$$\sin \theta_k - \sin \theta_0 = k \frac{\lambda}{a} \quad \text{avec } k \text{ un entier relatif appelé ordre de diffraction.}$$

Pour une onde monochromatique, la représentation de l'intensité relative en fonction de la différence de phase φ entre deux rayons d'un réseau de N fentes est la suivante :

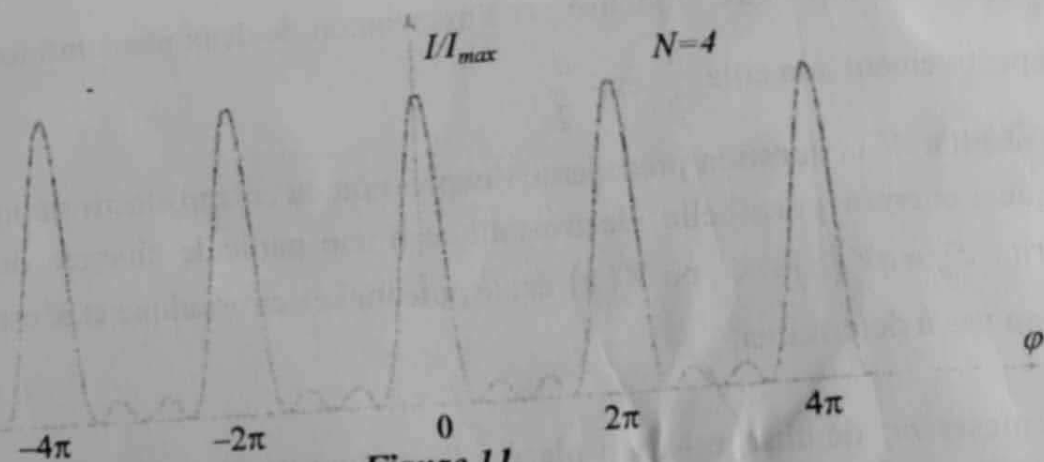


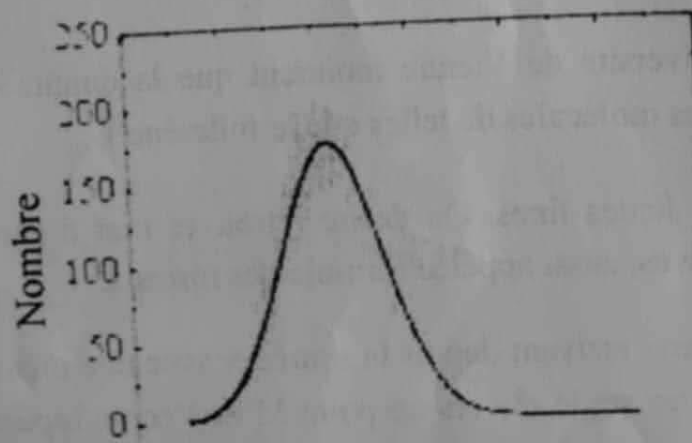
Figure 11

14. Comment évolue cette figure lorsque le nombre de fentes N augmente ?

15. Montrer qu'en incidence normale, la distance entre deux pics adjacents d'intensité maximale est donnée par $\Delta x = \frac{\lambda D}{a}$ avec x l'abscisse du détecteur (on supposera $x \ll D$).

16. La distribution de vitesse des molécules de C_{60} en sortie du four est donnée sur la figure 12. Après diffraction sur le réseau de pas $a = 100 \text{ nm}$, les molécules de C_{60} se déposent sur un écran bidimensionnel placé à une distance $D = 1,25 \text{ m}$.

Déterminer la longueur d'onde moyenne de de Broglie λ_m d'une molécule. En déduire la valeur de Δx .



15. Montrer qu'en incidence normale, par $\Delta x = \frac{\lambda D}{a}$ avec x l'abscisse du détecteur (on supposera $x \ll D$).

16. La distribution de vitesse des molécules de C_{60} en sortie du four est donnée sur la figure 12. Après diffraction sur le réseau de pas $a = 100 \text{ nm}$, les molécules de C_{60} se déposent sur un écran bidimensionnel placé à une distance $D = 1,25 \text{ m}$.

Déterminer la longueur d'onde moyenne de de Broglie λ_m d'une molécule. En déduire la valeur de Δx .

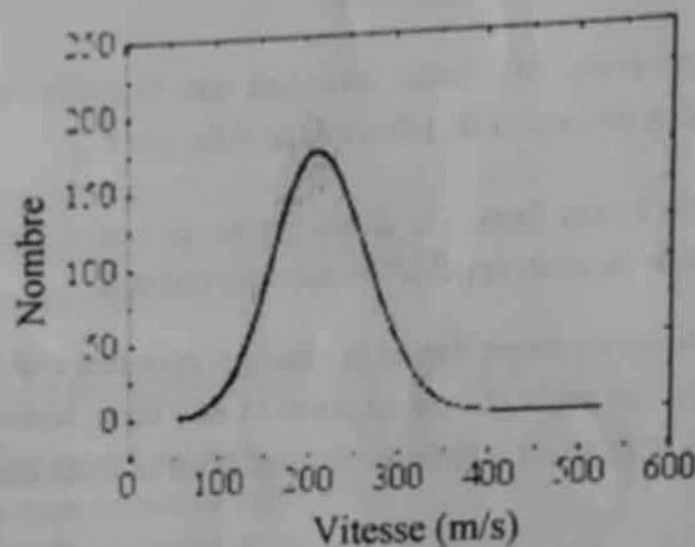


Figure 12

La distribution des vitesses donnée en figure 12, nous incite à modéliser la source S de molécules C_{60} comme une source d'ondes de de Broglie à spectre étendue (figure 13).

On pose $\Delta \lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ la largeur à mi-hauteur et λ_m la longueur d'onde moyenne du spectre de la source.

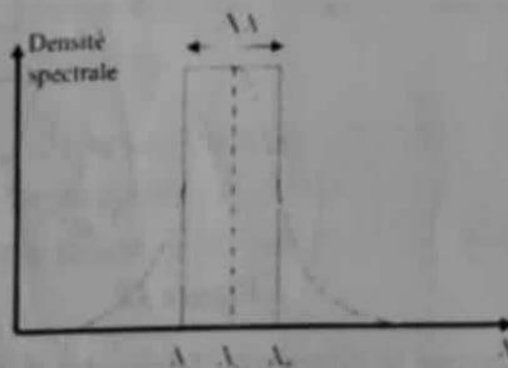


Figure 13

17. Estimer $\Delta \lambda$ à partir de la figure 12. Quelle est la conséquence d'un élargissement spectral de la source sur la répartition de l'intensité relative sur l'écran.