$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$

Dr Kchaou borhen

Section MP2–PT2-PC2

SERIE N°2
Échantillonnage

EXERCICE :1

On considère le signal $e(t) = e_0 \cos(\omega t)$. Il est échantillonné à la fréquence f_e considérée très élevée en premier temps.

1- a- Justifier que le signal échantillonné $s^*(t)$ peut s'interpréter comme le produit de $s(t)$ par une fonction $p(t)$ que l'on précisera.

b- Donner la décomposition en série de Fourier et le spectre de $p(t)$.

c- Faire de même pour $s^*(t)$

2- a- Comment récupérer le spectre du signal $s(t)$ après son échantillonnage ;
A quelle condition est ce possible. Que dire de l'échantillonnage si cette condition n'est pas vérifiée.

b- Un signal sinusoïdal de fréquence $f = 900$ Hz est échantillonné à $f_e = 1000$ Hz.
Montrer que l'échantillonnage est identique à celui réaliser sur un autre sinusoïdal de fréquence plus basse que l'on précisera.

EXERCICE :2

On considère un filtre (analogique) passe- bas de premier ordre de fréquence de coupure f_c et de gain statique $H_0 = 1$ (un circuit RC par exemple).

1-

a- Rappeler la forme canonique de sa fonction de transfert $\underline{H}_{an}(j\omega)$.

b- Ecrire l'équation différentielle liant l'entrée $e(t)$ et la sortie $s(t)$

c- La notation complexe pour le régime sinusoïdal forcé de pulsation ω de la tension d'entrée $e_n = e(nT_e) = E \exp(j\,\omega\, n\, T_e)$, Alors de la sortie $s_n = s(nT_e) = S \exp(j\, n\, \omega T_e)$. Discrétiser cette équation différentielle pour les deux signaux.

2-

a- En déduire la fonction de transfert numérique $\underline{H}_{num}(j\omega)$.

b- Discuter le cas limite ωT_e tend vers zéro.

c- Tracer sur un même graphe les gains G_{an} et G_{num} pour $f_c = 3$kHz et $f_e = 50$ kHz.

d- Commenter les résultats obtenus.

EXERCICE :3

on compare f_{max} à f_e et non pas f_0 à f_e (ici $f_{max} = 99 f_0$)

1- Déterminer la fréquence d'échantillonnage minimale à utiliser pour visualiser les spectres de signaux suivant : $s_1(t) = A \sin(2000\,\pi\, t)$; $s_2(t) = A \sin(20\,\pi\, t)$; $s_3(t) = s_1(t) + s_2(t)$; $s_4(t) = s_1(t) \times s_2(t)$; $s_5(t) = B \sin^2(2000\,\pi\, t)$

dans la question (3)

2- On considère à présent un signal triangulaire d'amplitude A dont la décomposition en série de Fourier est donnée par : $s_6(t) = \frac{8A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \sin(2000\,\pi\,(2k+1)\,t)$

On suppose qu'on puisse négliger les harmoniques dont l'amplitude est inférieur à 1% de celle du fondamental ; déterminer dans ce la fréquence d'échantillonnage minimale.

3- A l'aide d'un oscilloscope numérique on visualise le spectre signal rectangulaire de fréquence $f_0 = 4$ kHz et d'amplitude A. Ce signal étant échantillonné à une fréquence $f_e = 30$ kHz.

Sa décomposition en série de Fourier est donnée par : $s_7(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} \sin(2\,\pi\, f_0 (2k+1)\,t)$

a- Quelle différence majeure distingue le signal rectangulaire du signal triangulaire ? quelle en est la conséquence sur le spectre ?

b- La condition de Shannon est elle vérifiée pour ce signal. Discuter. Faire une représentation du spectre obtenu afin de valider votre réponse

c- En supposant qu'on puisse négliger les harmoniques dont l'amplitude est inférieure à 1% de celle du fondamental, déterminer dans ce cas la fréquence d'échantillonnage minimale.

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

mahdystudies.tn

EXERCICE : 4 *diffusion thermique dans une pièce de viande*

On considère un volume délimité par deux plans d'équation $x = - d/2$ et $x = + d/2$. Il est à l'équilibre à la température T_0. A l'instant $t = 0s$, on élève brutalement la température en $x = - d/2$ et en $x = + d/2$ à la température T_1. L'équation différentielle que vérifie $T(x,t)$ est :

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\lambda}{\rho c}\,\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

1- On discrétise le milieu en N tranches d'épaisseur $\Delta x = d/N$ où la température est uniforme. On discrétise de même le temps en intervalle Δt. On pose $T_{k,\ell} = T(-d/2 + k\,\Delta x, \ell\,\Delta t)$ où (k, ℓ) est un couple d'entiers, $k \in [1,.....N]$ et , $\ell \in [0,1,2.....]$.

Montrer que l'on peut choisir Δt pour obtenir la relation : $T_{k,\ell+1} = \dfrac{T_{k+1,\ell} + T_{k-1,\ell}}{2}$.

2- Compléter les températures dans les cases (ℓ, k) en degrés Celsius ($N = 5$; $T_0 = 20°C$; $T_1 = 100°C$).

		k					
ℓ	T_1	1	2	3	4	5	T_1
0	100	20	20	20	20	20	100
1	100						100
2	100						100
.....	100						100
	100						100

Si la diffusion précédent représente la diffusion thermique dans une pièce de viande ($D = 10^{-7}\ m^2s^{-1}$) d'épaisseur 1cm, combien de temps faut-il pour qu'elle soit cuite à coeur c'est-à-dire que la température au centre dépasse 65°C ?

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Série N°2 : Échantillonage

- Mahdy Studies -

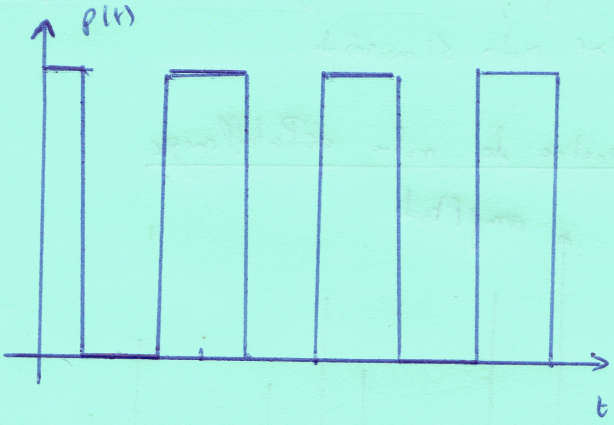
Exercice N°1 :

1-(a)

$s^*(t) = s(t)\, p(t)$

avec $p(t) = \begin{cases} k & \text{si } t \in [0, \frac{T}{4}] \\ 0 & \text{si } t \in]\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}] \\ k & \text{si } t \in]\frac{3T}{4}, T] \end{cases}$

et $p(t+T) = p(t)$



(b)

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n w_e t) + b_n \sin(n w_e t)$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T p(t)\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T p(t)\cos(n w_e t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T p(t)\sin(n w_e t)\,dt$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{4}} k\,dt + \int_{\frac{3T}{4}}^{T} k\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{T}\left(k\frac{T}{4} + \frac{T}{4}k\right)$$

$$= \frac{T}{2} \times \frac{1}{T} \times k$$

$$\boxed{a_0 = \frac{K}{2}}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T p(t)\cos(n w_e t)\,dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} k\cos(n w_e t)\,dt + \frac{2}{T}\int_{\frac{3T}{4}}^{T} k\cos(n w_e t)\,dt$$

$$= \frac{2k}{T}\left[\frac{\sin(n w_e t)}{n w_e}\right]_0^{\frac{T}{4}} + \frac{2k}{T}\left[\frac{\sin(n w_e t)}{n w_e}\right]_{\frac{3T}{4}}^{T}$$

$$= \frac{2k}{n\frac{2\pi}{T}T}\sin\left(n\frac{2\pi}{T}\times\frac{T}{4}\right) = \frac{k}{n\pi}\sin\left(\frac{3n\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{k}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2} - \sin\frac{3n\pi}{2}\right)$$

pour $n = 2p$: $a_{2p} = 0$

pour $n = 2p+1$ $\quad a_{2p+1} = \frac{2k}{(2p+1)\pi}$

$b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ car p est paire donc contient que des termes en sinus.

d'où $\boxed{p(t) = \frac{k}{2} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2k}{(2p+1)\pi}\cos(2p w_e t)}$

(c)

$s^*(t) = s(t)\, p(t)$

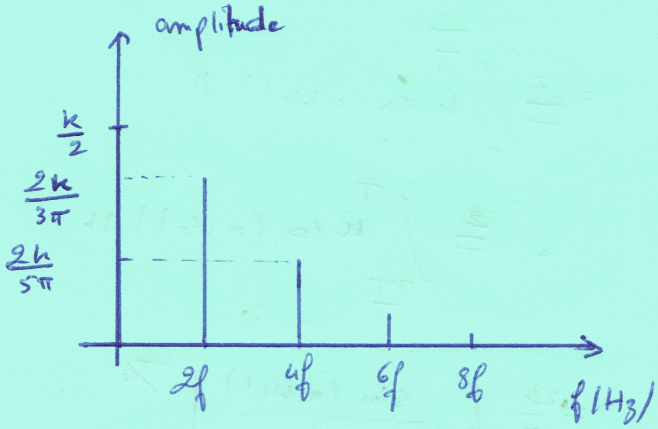
$$= \frac{k}{2}e_0\cos(wt) + \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{2ke_0}{(2p+1)\pi}\cos(2p w_e t)\cos(wt)$$

$$= \frac{k}{2}e_0\cos(wt) + \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{2ke_0}{2p+1}\cos\left((2p w_e - w)t\right)$$

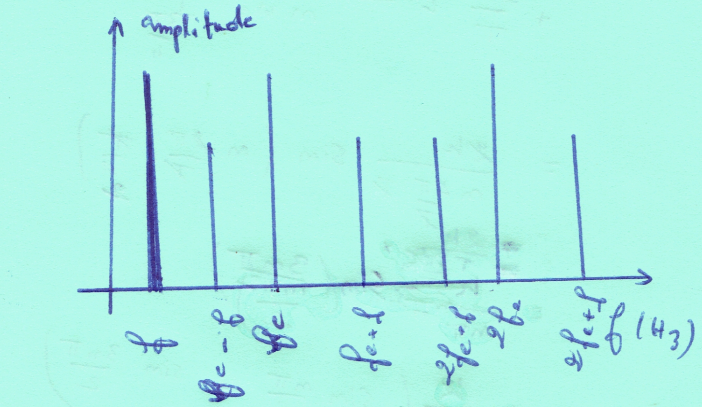
$$+ \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{2ke_0}{2p+1}\cos\left((2p w_e + w)t\right)$$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Spectre de $p(t)$:



Spectre de $s^*(t)$:



2/a) pour récupérer le filtre échantillonneur il faut un filtre passe-bas moyennant

tq $f < f_c < f_e - f$

Condition $f < f_e - f$

$\Rightarrow$ $\boxed{f_e > 2f}$ Condition de shannon Nyquist

Si cette condition n'est pas vérifiée on dit qu'on a un chevauchement ou repliement.

b) la première fréquence échantionnée est

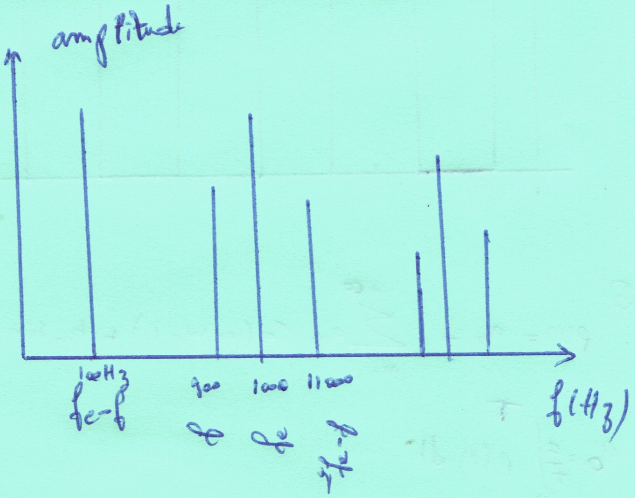
$1000 - 900\,Hz = 100\,Hz = f_e - f$

$f_e - f = 1100\,Hz$

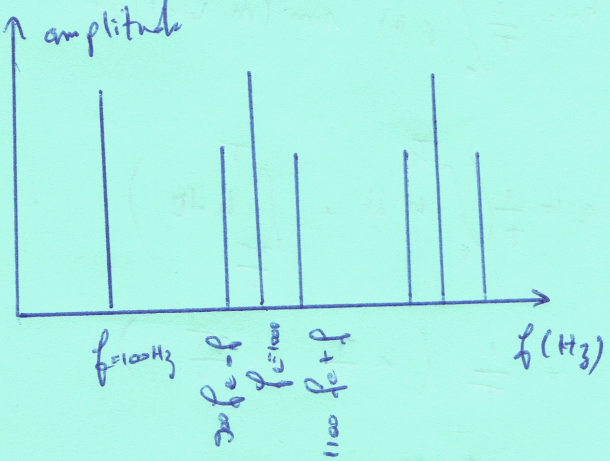
et $f = 900\,Hz$

c'est le même échantion d'un signal de fréquence 100 Hz de même amplitude que notre sinusoïde.

Spectre de notre échantillonnage



Spectre d'un signal de même amplitude mais de fréquence 100 Hz



(Les spectres sont identiques).

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Exercice N°2:

1) (a)

$$H_{an}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

(b) $\frac{S(t)}{e(t)} = \frac{1}{1+j\omega\tau}$

$$\Rightarrow S(t)(1+j\omega\tau) = e(t)$$

$$\Rightarrow S(t) + \tau\frac{dS}{dt} = e(t)$$

Alors $\boxed{\frac{dS}{dt} + \frac{1}{\tau}S(t) = \frac{e(t)}{\tau}}$

(c) $\frac{dS}{dt} \xrightarrow{CAN} \frac{S_{n+1} - S_n}{T_e}$

$$\Rightarrow \frac{S_{n+1} - S_n}{T_e} + \frac{1}{\tau}S_n(t) = \frac{E_n(t)}{\tau}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_n(t) = S_n(t) + \frac{\tau}{T_e}(S_{n+1} - S_n)}$$

or $E_n(t) = E\exp(jn\omega T_e)$

$S_n(t) = S\exp(jn\omega T_e)$

$$S_{n+1} - S_n = S\exp(j(n+1)\omega T_e) - S\exp(jn\omega T_e)$$
$$= S\exp(jn\omega T_e)\left[\exp(j\omega T_e) - 1\right]$$
$$= S_n(t)\left[\exp(j\omega T_e) - 1\right]$$

D'où on a $e_n(t) = S_n(t) + \frac{\tau}{T_e}S_n(t)\left[e^{j\omega T_e} - 1\right]$

$$= S_n(t)\left[1 + \frac{\tau}{T_e}(e^{j\omega T_e} - 1)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{S_n(t)}{e_n(t)} = \frac{1}{1 + \frac{\tau}{T_e}(e^{j\omega T_e} - 1)}}$$

d'où $\boxed{H_{num} = \frac{1}{1 + \frac{\tau}{T_e}(\exp(j\omega T_e) - 1)}}$

(b)

$\omega T_e \longrightarrow 0$

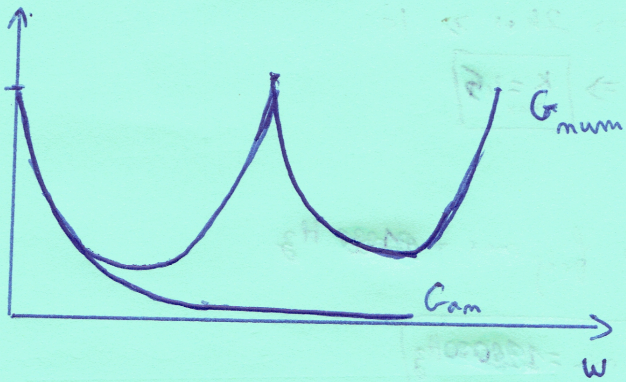
$$H_{num} = \frac{1}{1 + \frac{\tau}{T_e}(1 + j\omega T_e - 1)}$$

$$= \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

$$= H_{an}$$

$$G_{an} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$G_{num} = \frac{1}{\sqrt{1 + (1 - \cos(\omega T_e))\left(\frac{2\tau^2}{T_e^2} - \frac{2\tau}{T_e}\right)}}$$



(d) on basse fréquence G_{an} et G_{num} sont comparables.

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Exercice 3 :

$f_{e\,min} = 2 f_{max}$

1) A_1 : $f_{min} = 2000\,Hz$

A_2 : $f_{min} = 20\,Hz$

A_3 : $f_{min} = 2000\,Hz$

A_4 : $f_{min} = 2020\,Hz$

A_5 : $f_{min} = 4000\,Hz$

2) $S_6(t) = \frac{8A}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \sin(2000\pi(2k+1)t)$

$$\frac{S_k}{S_1} = \frac{\frac{8A}{\pi}}{\frac{8A}{\pi}(2k+1)^2} \leq 0{,}01$$

$\Rightarrow (2k+1)^2 \geq 100$

$\Rightarrow 2k+1 \geq 10$

$\Rightarrow \boxed{k_{max} = 4}$

$\Rightarrow f_{réj\,max} = 9000\,Hz$

$\boxed{f_{e\,min} = 18000\,Hz}$

3) ⓐ le signal rectangulaire possède plus de discontinuités que le signal triangulaire ainsi le signal rectangulaire est plus riche en harmoniques.

ⓑ La condition de shannon n'est pas vérifié car par exemple :

$7f_0 = f_e - f_0$

$2k+1 \geq 100$

$\Rightarrow k \geq 49{,}5$

$\Rightarrow \boxed{k_{max} = 49}$

$\Rightarrow \boxed{f_{réj\,max} = 396000\,Hz}$

$\Rightarrow \boxed{f_e = 792\,kHz}$

Exercice 4 : diffusion Thermique dans une pièce de viande.

discrétisation :

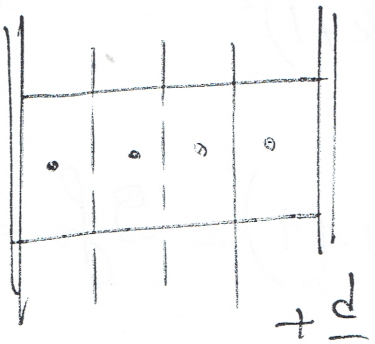
$$\boxed{\frac{ds}{dt} = \frac{S_{n+1} - S_n}{T_e}}$$

$$\frac{d^2s}{dt} = \frac{\frac{S_{n+1} - S_n}{T_e} - \frac{S_n - S_{n-1}}{T_e}}{(n+1)T_e - nT_e}$$

$$\boxed{\frac{d^2s}{dt} = \frac{S_{n+1} + S_{n-1} - 2S_n}{T_e^2}}$$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

Ex4



$-\frac{d}{2}$ $+\frac{d}{2}$

$T(-\frac{d}{2} + k\Delta x, l\Delta t$

$l = 0, 1, 2, 3$

$s(t) \longrightarrow s(nT_e) = s_n$

$T(\quad) \longrightarrow T_{k,l}$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} \longrightarrow \frac{T_{k,l+1} - T_{k,l}}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \longrightarrow \frac{T_{k+1,l} - T_{k,l}}{(\Delta x)}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \longrightarrow \frac{T_{k+1,l} + T_{k-1,l} - 2T_{k,l}}{(\Delta x)^2} \quad (8)$$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

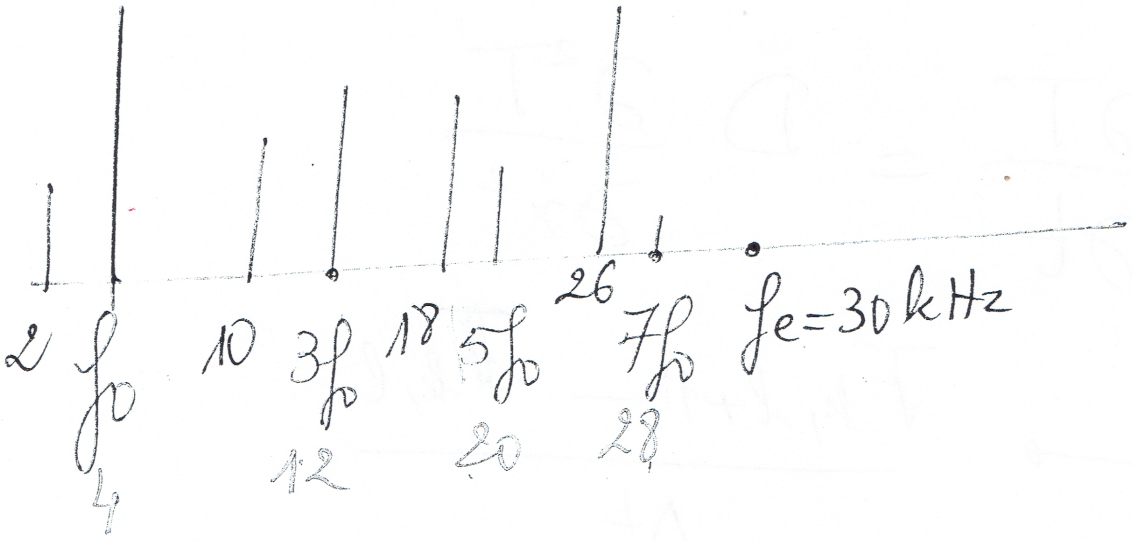
$$s_6(t) = \frac{8A}{\pi} \sum_{0}^{4} \frac{1}{(2k+1)^2} \sin(2\pi f_0 (2k+1) t)$$

$$f_{max} = f_0 (2\times 4 + 1) = 9 f_0 = 9\,kHz$$

$$f_{e\,min} = 18\,kHz$$



$f_0 = 4\,kHz$; $f_e = 30\,kHz$



$$\frac{A_{2k+1}}{A_1} \leqslant 1\% \Rightarrow (2k+1) \geqslant 100$$

$$k \geqslant 49{,}5$$

$$k = \sum_{0}^{49}$$

$$f_{max} = f_0 (2k+1) = 99 f_0$$

$$f_e = (99 \times 2 \times 4) = 792\,kHz$$

99

7

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

$$\frac{T_{k,l+1} - T_{k,l}}{(\Delta t)} = \frac{D}{(\Delta x)^2}\left(T_{k+1,l} + T_{k-1,l} - 2T_{k,l}\right)$$

on pose $\quad \frac{1}{\Delta t} = \frac{2D}{(\Delta x)^2}$

$$\Delta t = \frac{(\Delta x)^2}{2D}$$

$$\frac{2D}{(\Delta x)^2} T_{k,l+1} = \frac{D}{(\Delta x)^2}\left(T_{k+1,l} + T_{k-1,l}\right)$$

$$T_{k,l+1} = \frac{T_{k+1,l} + T_{k-1,l}}{2}$$

k

l	T_1	1	2	3	4	5	~~100~~ T_1
0	100	20	20	20	20	20	100
1	100	60	40	20	.	.	100
2	100		40				100

$$T_{1,1} = T_{k=1,\,l=0} = \frac{T_{20} + T_{00}}{2}$$

$$= \frac{20 + 100}{2} = 60$$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.

		k					
ℓ	T_i	1	2	3	4	5	T_1
0	100	20	20	20	20	20	100
1	100	60	20	20	20	60	100
2	100	60	40	20	40	60	100
3	100	70	40	40	40	70	100
4	100	70	55	40	55	70	100
5	100	77	55	55	55	77	100
6	100	77	66	55	66	77	100
7	100	83	66	66	66	83	100



b) D'après le tableau : $\tau = 7\,\Delta t$ pour cuire la viande à cœur, Pour un morceau d'un centimètre divisé en 5 tranches d'épaisseur $\Delta x = 2$ mm

$$\tau = \frac{7\,(\Delta x)^2}{2D} = 140\,s = 2\,mn\ 20\,s.$$

$$\Delta x = \frac{1\,cm}{5}$$

© Mahdy Studies, 2023. Tous droits réservés.