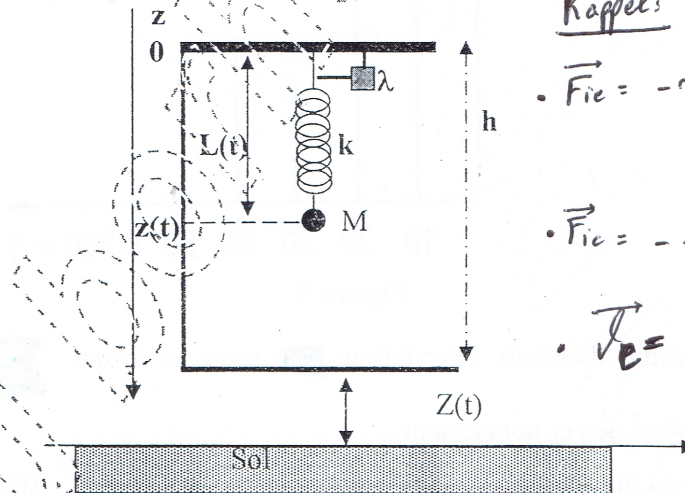


ETUDE D'UN SISMOGRAPHE

Un sismographe est typiquement constitué d'une masse M attachée à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 . Le ressort est fixe à un bâti lié au sol à un dispositif non représenté qui assure un amortissement sur la masse se traduisant par la force $\vec{F}_c = -h\vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse de la masse dans le référentiel lié au bâti rigide. L'axe Oz est lié au sol (et au bâti).



Rappel: mécanique newtonienne

$$\vec{F}_c = -m \left[\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right]_R + \frac{d\vec{r}_{R/R_0}}{dt} \wedge \vec{\sigma}_R^M + \vec{r}_{R/R_0} \wedge \left(\frac{d\vec{\sigma}_R^M}{dt} \right)$$

$$\vec{F}_c = -2m \vec{r}_{R/R_0} \wedge \vec{\sigma}_R^M$$

$$\vec{J}_R = \frac{d\vec{\sigma}_R^M}{dt} + \vec{r}_{R/R_0} \wedge \vec{\sigma}_R^M$$

1- Quelle est la longueur l_0 du ressort, quand le solide est à l'équilibre en l'absence de secousse sismique. Le référentiel lié au sol est supposé galiléen.

2- Quand un séisme intervient, le sol subit un déplacement $Z(t)$ par rapport à un référentiel galiléen. Le référentiel lié au sol est-il alors galiléen. *Je repère lié au sol et non galiléen*

3- On pose : $u(t) = z(t) - l_0$; Montrer : $\ddot{u} + \frac{\sqrt{2}}{\tau} \dot{u} + \omega_0^2 u = \alpha \ddot{Z}$; On précisera la valeur et l'homogénéité de τ et ω_0 et α . on exploitera aussi leur interprétation physique.

4- On se place en régime sinusoïdal forcé. Normalement : $Z(t) = Z_0 \exp(j\omega t)$; donner l'expression de la fonction de transfert mécanique sous la forme suivante : $H(j\omega) = \frac{u}{Z} = \frac{1}{-1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + j\sigma \frac{\omega_0}{\omega}}$ (cas $\omega_0 \tau = 1$).

5- Le diagramme de Bode est tracé en figure 2. Quel type de filtre a-t-on réalisé ? est-ce bien cohérent avec la fonction de transfert calculée ?

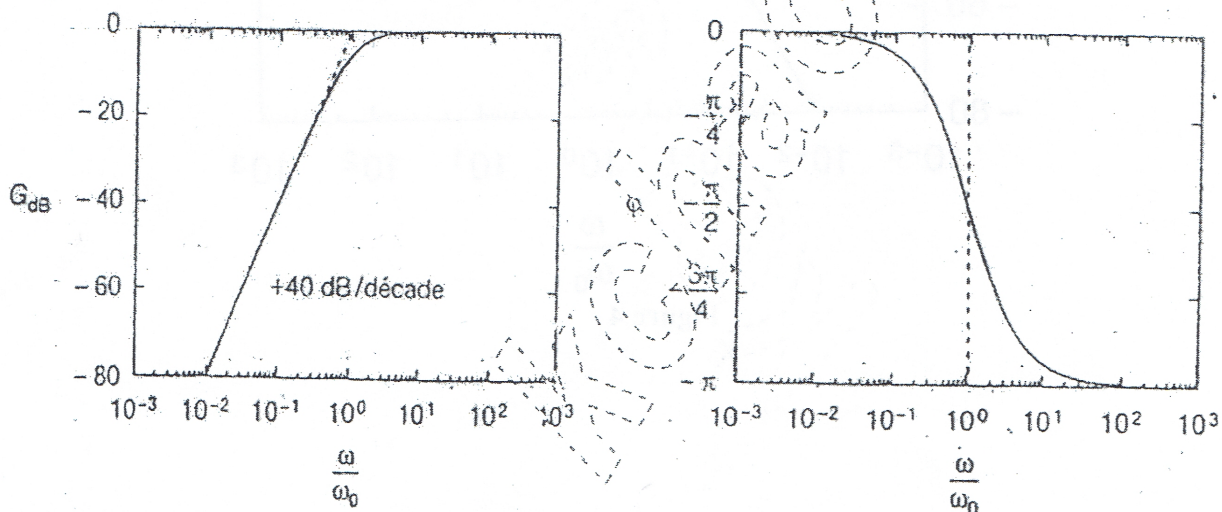


Figure 2

6- La pulsation propre du sismomètre étant $\omega_0 = 20 \text{ rad.s}^{-1}$, l'appareil détecte une onde sismique sous la forme de la fonction périodique $u(t)$. L'application d'un algorithme de transformée de Fourier fournit le spectre c_n tracé en figure 3. Quelle est la période de cette onde ?

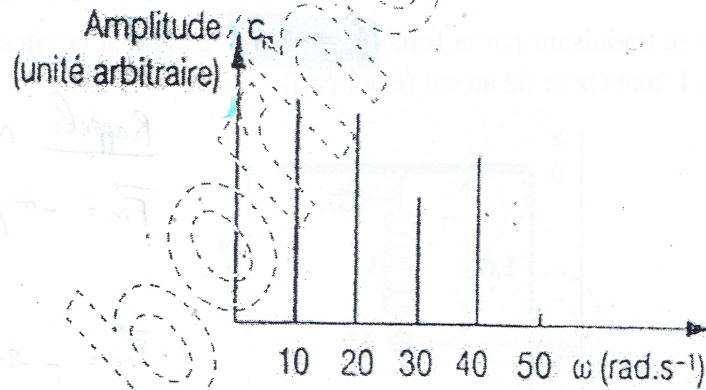


Figure 3

7- Montrer qu'il est possible d'obtenir l'excitation $Z(t)$ sous la forme : $Z(t) = \sum_{n>0} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$

et expliciter les c_n en fonction des c_n notamment.

8- En considérant l'allure du diagramme de Bode en amplitude pour $\omega_0 \tau > 1$ (Fig. 4), expliquer pourquoi le choix $\omega_0 \tau > 1$ doit absolument être évité.

9- Comment devrait-on modifier les caractéristiques du sismomètre afin que l'enregistrement de $u(t)$ permette de déduire directement $Z(t)$?

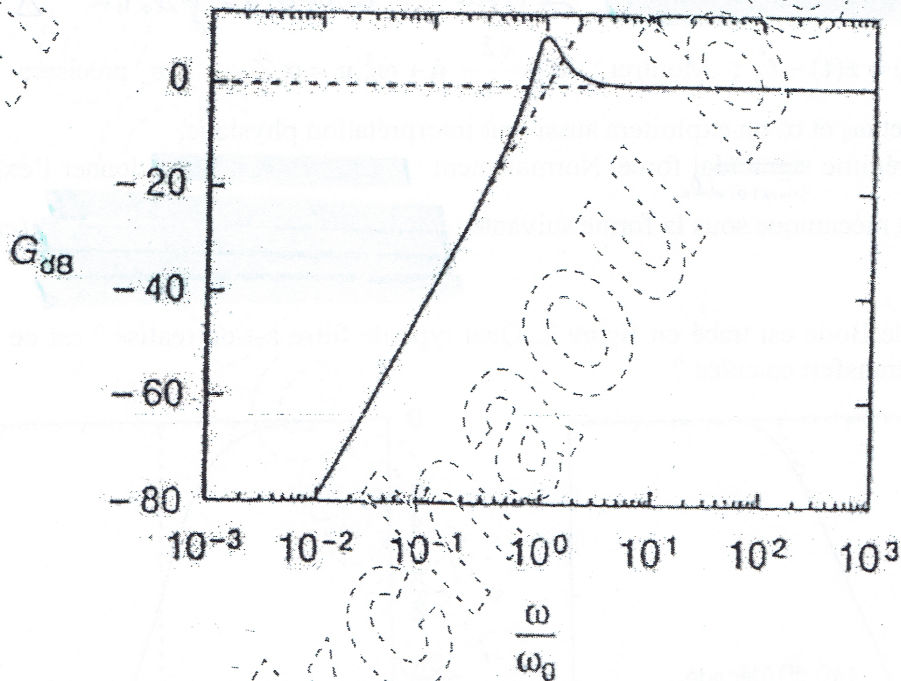


Figure 4

Etude d'un sismographe.

1- RFD sur le pt M:

$$- \lambda \dot{z} + M \vec{g} - k(z(t) - l_0) = m \ddot{z}(t)$$

$$\text{à l'équilibre } M \vec{g} - k(l'_0 - l_0) = 0$$

$$\Rightarrow -k l'_0 + k l_0 + M g = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{l'_0 = l_0 + \frac{M g}{k}}$$

2- Le référentiel lié au sol n'est pas galiléen. car $\ddot{z} \neq 0$

3- RFD au point M au cas de résonance

bilans

- poids
- Tension du ressort
- frottement visqueux
- forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

$$\vec{F}_{ic} = \vec{0}$$

$$\vec{F}_{ie} = -m \ddot{\vec{z}}$$

$$M g - k(z(t) - l_0) - \lambda \dot{z} - m \ddot{z} = m \ddot{z}$$

$$\text{or } M g = k(l'_0 - l_0)$$

$$\Rightarrow k(l'_0 - l_0 - z(t) + l_0) - \lambda \dot{z} - m \ddot{z} = m \ddot{z}$$

$$\Rightarrow -k u(t) - \lambda \dot{u} - m \ddot{u} = m \ddot{z}$$

$$\Rightarrow \ddot{u} + \frac{\lambda}{m} \dot{u} + \frac{k}{m} u(t) = -\ddot{z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\lambda}{m} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{k}{m} = \omega_0^2 \end{cases}$$

4) excitation sinusoïdale

$$\Rightarrow -\omega^2 \underline{u} + \frac{r_2}{2} j\omega \underline{u} + \omega_0^2 \underline{u} = \alpha - \omega^2 \underline{z}(t)$$

$$\omega_0^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left(j\frac{r_2}{2}\omega + \omega_0^2 - \omega^2 \right) \underline{u} = -\omega^2 \underline{z}(t)$$

$$\Rightarrow \underline{u}(\omega) = \frac{\underline{u}}{\underline{z}} = \frac{-\omega^2}{j\frac{r_2}{2}\omega + \omega_0^2 - \omega^2} = \frac{\omega^2}{j\frac{r_2}{2}\omega + \omega_0^2 - \omega^2}$$

$$= \frac{1}{-1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + j\frac{r_2}{2}\frac{\omega_0}{\omega}} \Rightarrow \sigma = r_2$$

5) c'est un filtre passe - Haut qui est bien cohérent avec notre f_{ch} de transfert

$$6) \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{5} \text{ s}$$

$$7) \underline{z}(t) = \underline{u}(t) \underline{u}(\omega)$$

$$\Rightarrow \underline{z}(t) = \sum C_m R(m\omega) \cos(m\omega t + \varphi_m + \frac{\varphi_z(m)}{2})$$

$$\text{avec } \begin{cases} R(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{2}{m}\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{2}{m}\right)^2\right)^2}} \\ \varphi_z(m) = -\arctg \frac{\sigma \frac{\omega_0}{m\omega}}{\frac{\omega_0^2}{m\omega^2} - 1} = -\arctg \frac{\sigma \frac{2}{m}}{\frac{4}{m^2} - 1} \end{cases}$$

8- On doit éviter ce type de filtrage car il y a le comportement d'un passe bande, il nous indique que une bande de fréquence et n'indique pas les hautes fréquences atténuées.

9- on modifie ω de façon que $\alpha(\omega) = 1$ (suivre).